ISBN 978-5-901795-16-3 ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ. Переславль-Залесский, 2009

удк 517

Ю. Л. Сачков, А. А. Ардентов, А. П. Маштаков

# Конструктивное решение задачи управления на основе метода нильпотентной аппроксимации

Аннотация. Описан метод нильпотентной аппроксимации нелинейных управляемых систем с линейным управлением. Представлен алгоритм решения задачи управления для таких систем на основе нильпотентной аппроксимации. Рассматривается реализация этого алгоритма в классах оптимальных и кусочно-постоянных управлений.

## 1. Постановка задачи и определения

Работа посвящена исследованию нелинейных управляемых систем с линейными управлениями:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x), \; x \in M, \; u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m, \tag{1.1}$$

где $M$ — связное гладкое многообразие, $g_i$ — аналитические векторные поля на $M$, а $u_i(\cdot)$ — измеримые локально ограниченные управления.

Рассматривается следующая задача управления. Для заданных точек $p, q \in M$ и времени $T > 0$, требуется найти управление $u(t)$, $t \in [0, T]$, переводящее систему (1.1) из точки $p$ в точку $q$:

$$x(0) = p, \qquad x(T) = q.$$

Напомним, что система называется вполне управляемой, если для любых $p, q \in M$ эта задача управления разрешима для некоторого $T > 0$. Для линейной по управлениям системы (1.1) критерий полной управляемости дается в терминах алгебры Ли векторных полей, порожденной полями в правой части системы:

$$\mathrm{Lie}(g_1, \dots, g_m) = \mathrm{span}(g_1, \dots, g_m, [g_i, g_j], [g_i, [g_j, g_k]], \dots).$$

Определение 1. Система (1.1) имеет полный ранг в точке $x \in M$, если

$$\mathrm{Lie}(g_1, \dots, g_m)(x) = T_x M.$$

---

Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований, проект No. 09-01-00246.

Теорема 1 (Рашевский–Чжоу, [1]). *Система* (1.1) *вполне управляема на $M$ тогда и только тогда, когда она имеет полный ранг в любой точке $x \in M$.*

Несмотря на то, что вопрос управляемости для линейных по управлению систем (1.1) имеет полное решение (ответ сводится к дифференцированию векторных полей и вычислению размерности их линейной оболочки), задача построения управления, переводящего систему из одной точки в другую, весьма нетривиальна (в основном для нас случае, когда размерность пространства состояний меньше, чем размерность управлений). Основное препятствие заключается в том, что такие системы имеют существенно разные скорости перемещения по разным направлениям. Величина смещения в направлении полей $g_i$ за малое время $t$ есть $O(t)$, в направлении коммутаторов $[g_i, g_j]$ есть $O(t^2)$, в направлении $[g_i, [g_j, g_k]]$ есть $O(t^3)$, и т.д. Даже для систем, имеющих наиболее простую структуру при сохранении свойства управляемости (нильпотентных), эта задача не имеет общего решения, и должна рассматриваться независимо для каждой канонической формы нильпотентной системы в каждой размерности.

Прежде чем перейти к алгоритмам приближенного решения задачи управления, рассмотрим следующие основные примеры, играющие важную роль в механике и робототехнике.

Пример 1 (Качение шара по плоскости). Рассмотрим сферу, катящуюся по горизонтальной плоскости без прокручивания и проскальзывания; например, сферу, катящуюся между двумя горизонтальными плоскостями — неподвижной нижней и подвижной верхней плоскостью.

Обозначим через $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ точку контакта сферы и плоскости, и через $R \in \mathrm{SO}(3)$ ортогональную матрицу, задающую ориентацию сферы в трехмерном пространстве. Пусть $E_{ij}$ обозначает $3 \times 3$ матрицу, все элементы которой равны нулю, кроме элемента в $i$-ой строке и $j$-ом столбце, который равен единице. Тогда движение системы описывается следующей управляемой системой [1, 2]:

$$\dot{x}_1 = u_2, \qquad \dot{x}_2 = u_2, \tag{1.2}$$

$$\dot{R} = u_1 R(E_{31} - E_{13}) + u_2 R(E_{23} - E_{32}). \tag{1.3}$$

Эта система вполне управляема и имеет вектор роста $(2, 3, 5)$.

Отметим, что качение двух произвольных поверхностей без прокручивания и проскальзывания также моделируется системой вида (1.1) с двумерным управлением и пятимерным пространством состояний; если в точке касания поверхности имеют разные гауссовы кривизны, то система также имеет вектор роста $(2, 3, 5)$, и имеет ту же нильпотентную аппроксимацию, что и система (1.2), (1.3). Система вполне управляема тогда и только тогда, когда катящиеся поверхности неизометричны, см. [1].

Пример 2 (Машина с двумя прицепами). Рассмотрим модель машины на плоскости с центром масс $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ и углом наклона $\theta \in S^1$ относительно положительного направления оси $x$. Пусть к машине последовательно присоединены два прицепа. Обозначим через $\varphi_1$ угол поворота первого прицепа относительно машины, и через $\varphi_2$ угол поворота второго прицепа относительно первого. Соответствующая управляемая система имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\dot q = u_1 X_1(q) + u_2 X_2(q), \qquad q = (x, y, \theta, \varphi_1, \varphi_2),\\
&X_1 = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y} - \sin\varphi_1 \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + (\sin\varphi_1 + \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \frac{\partial}{\partial \varphi_2},\\
&X_2 = \frac{\partial}{\partial \theta} - (1 + \cos\varphi_1) \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + (\cos\varphi_1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) \frac{\partial}{\partial \varphi_2}.
\end{aligned}
$$

Эта система вполне управляема, и имеет вектор роста $(2, 3, 5)$ в точках, где $\varphi_1 \neq \varphi_2$.

Конструктивная задача управления активно изучается в последнее время в современной нелинейной теории управления. Эта задача имеет удовлетворительное решение в случае систем, находящихся в цепной форме, и приводимых к такой форме обратной связью [3, 4], а также для дифференциально плоских систем [5]. Однако системы общего положения с двумя управлениями имеют вектор роста $(2, 3, 5)$ (как, например, в примерах 1, 2), потому эти результаты неприменимы к таким системам.

В данной работе мы рассматриваем метод решения задачи управления, основанный на нильпотентной аппроксимации. Идея метода заключается в том, что управляемая система локально приближается более простой системой (нильпотентной), для которой задача управления часто может быть решена точно. Управления, точно решающие нильпотентную систему, дают приближенное решение исходной задачи управления в малой окрестности целевой точки. Метод нильпотентной аппроксимации применим к задачам управления общего вида; существенно только уметь решать задачу управления для нильпотентной аппроксимации. Этот метод предложен в работах [6–10].

Цель данной работы — применение метода нильпотентной аппроксимации к системам (1.1) общего вида на пятимерных многообразиях с двумерным управлением. Для нильпотентных аппроксимаций таких систем в последние годы было получено точное решение задачи управления в классе оптимальных управлений (в смысле функционала субримановой длины) [11–14], которое будет основным инструментом в решении задачи управления для общих нелинейных систем.

Напомним определения некоторых важных понятий.

Для точки $x_0 \in M$, обозначим через $\eta$ траекторию системы (1.1), выходящую из точки $x_0$ под действием управления $u(t), t \in [0,T]$. Длина траектории определяется как

$$\text{length}(\eta) = \int_0^T \sqrt{u_1^2(t) + \cdots + u_m^2(t)}dt. \tag{1.4}$$

Система (4.1) индуцирует субриманово расстояние в $\mathbb{R}^n$, определяемое как

$$d(x_1,x_2) = \inf_{\eta} \text{length}(\eta) \tag{1.5}$$

с инфимумом, берущимся по всем траекториям $\eta$, соединяющим $x_1$ с $x_2$. Из теоремы Рашевского–Чжоу следует, что если система (1.1) имеет полный ранг, то для любых точек $x_1, x_2 \in M$ выполняется неравенство $d(x_1,x_2) < \infty$.

Зафиксируем $x_0 \in M$ и обозначим через $L^s(x_0)$ векторное пространство, порождаемое значениями в точке $x_0$ скобок Ли векторных полей $g_1,\dots, g_m$ длины $\leq s$, $s = 1,2,\dots$ (сами поля $g_i$ — скобки длины 1). Условие полного ранга гарантирует, что существует наименьшее целое число $r = r(x_0)$ такое, что $\dim L^r(x_0) = n = \dim M$. Это число $r$ называется порядком неголономности системы (1.1) в точке $x_0$.

Вектором роста системы (1.1) в точке $x_0$ называется вектор с компонентами $(n_1(x_0),\dots,n_r(x_0))$, где $n_s(x_0) = \dim L^s(x_0)$, $s = 1,\dots,r$.

Точка $x_0$ называется регулярной, если вектор роста постоянен в окрестности точки $x_0$, иначе $x_0$ называется сингулярной. Далее будем предполагать, что все точки системы (1.1) регулярны.

Управляемая система (1.1) называется нильпотентной, если соответствующая алгебра Ли $Lie(g_1, \ldots, g_m)$ нильпотентна, то есть для некоторого $N \in \mathbb{N}$

$$[g_{i_1}, [g_{i_2}, \ldots, [g_{i_N}, g_{i_{N+1}}] \ldots]] = 0, \ \forall i_1, \ldots, i_{N+1} \in \{1, \ldots, m\}.$$

## 2. Нильпотентная аппроксимация неголономных систем

Понятие неголономной аппроксимации управляемых систем было предложено независимо А. А. Аграчевым и А. В. Сарычевым [6] и Х.Хермсом [8]. Инвариантная конструкция нильпотентной аппроксимации была получена А. А. Аграчевым и А. Мариго.

Локальное приближение управляемой системы другой, более простой системой, широко используется в теории управления. Обычно в качестве локальной аппроксимации используется линеаризация управляемой системы. Однако для линейных по управлению систем вида (1.1) линеаризация дает слишком грубое приближение. Если размерность управления меньше размерности состояния (этот важный случай наиболее интересен), то линеаризация не может быть вполне управляемой. Естественную замену линейной аппроксимации в этом случае доставляет нильпотентная аппроксимация — наиболее простая система, сохраняющая структуру управляемости исходной системы (в частности, сохраняется такой важный инвариант как вектор роста).

Во избежание излишних технических деталей, опишем свойства нильпотентной аппроксимации в основном для нас случае — для систем с пятимерным состоянием и двумерным управлением:

$$\dot{q} = u_1 X_1(q) + u_2 X_2(q), \qquad q \in M, \dim M = 5, \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \tag{2.1}$$

в предположении, что в рассматриваемой точке $q_0 \in M$ эта система имеет вектор роста $(2, 3, 5)$, т.е. следующие векторные поля линейно независимы:

$$X_1, \quad X_2, \quad X_3 = [X_1, X_2], \quad X_4 = [X_1, X_3], \quad X_5 = [X_2, X_3].$$

Известно, что для системы (2.1) общего положения это условие на вектор роста выполняется в точке $q_0$ общего положения.

В некоторой окрестности $U_{q_0} \subset M$ точки $q_0$ существует пара векторных полей $(Y_1, Y_2)$, доставляющих нильпотентную аппроксимацию системы $(X_1, X_2)$ в точке $q_0$, со следующими свойствами. Алгебра Ли

$$L = \operatorname{Lie}(Y_1, Y_2)$$

нильпотентна и порождена как линейное пространство векторными полями

$$Y_1,\ Y_2,\ Y_3 = [Y_1, Y_2],\ Y_4 = [Y_1, Y_3],\ Y_5 = [Y_2, Y_3], \tag{2.2}$$

все остальные скобки Ли в $L$ либо равны нулю, либо следуют из (2.2) в силу линейности и кососимметричности. Существует система координат $\Phi : U_{q_0} \to \mathbb{R}^5$, называемая привилегированной, в которой $Y_i$, $i = 1, \dots, 5$, становятся полиномиальными векторными полями. Пространство $\mathbb{R}^5$ может быть отождествлено со связной односвязной группой Ли $G$, соответствующей алгебре Ли $L$.

Управляемая система (2.1) и субриманова структура

$$\Delta = \operatorname{span}(X_1, X_2), \quad \langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij},\ i, j = 1, 2 \tag{2.3}$$

приближаются в окрестности $U_{q_0}$ соответственно системой

$$\dot{g} = u_1 Y_1(g) + u_2 Y_2(g), \quad g \in G, \quad u_1,\, u_2 \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

и субримановой структурой

$$D = \operatorname{span}(Y_1, Y_2), \quad \langle Y_i, Y_j \rangle = \delta_{ij},\ i, j = 1, 2, \tag{2.5}$$

в следующем смысле.

Пусть $q(t)$ и $g(t)$ суть траектории систем (2.1) и (2.4), соответствующие некоторым допустимым управлениям $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_1^2(t) + u_2^2(t) \equiv 1$, выходящие из точки $Q \ni q_0 = e \in G$.

В адаптированных координатах $(g_1, \dots, g_5)$ в окрестности $U_{q_0}$ рассмотрим дилатации

$$\delta_\varepsilon : (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5) \mapsto (\varepsilon g_1, \varepsilon g_2, \varepsilon^2 g_3, \varepsilon^3 g_4, \varepsilon^3 g_5).$$

Траектории $g(t)$ нильпотентной системы (2.4) однородны относительно этих дилатаций:

$$\delta_\varepsilon g(t) = g(\varepsilon t)$$

и приближают траектории $q(t)$ системы (2.1):

$$\delta_{\frac{1}{t}}(q(t) - g(t)) = O(t), \quad t \to 0.$$

Существуют такие $\gamma > 0$ и $C > 0$, что для всех $|t| < \gamma$ выполнено неравенство

$$d_G(q(t), g(t)) \leq Ct^{4/3},$$

где $d_G$ есть субриманово расстояние на группе Ли $G$, соответствующее субримановой структуре (2.5):

$$d_G(g_0, g_1) = \inf \left\{ \int_0^1 \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)}\, dt \right\},$$

инфимум берется по всем траекториям $g(\cdot)$ системы (2.4), для которых $g(0) = g_0$, $g(1) = g_1$.

## 3. Алгоритм нильпотентной аппроксимации

А.Белаиш [7] разработал алгебраический алгоритм вычисления нильпотентной аппроксимации системы вида (1.1) в окрестности регулярной точки $x_0 \in M$. Далее в пункте 3.1 этот алгоритм изложен на основе работы М. Вендиттелли и соавторов [10]. В пункте 3.2 этот алгоритм конкретизируется для систем (2.1) с вектором роста $(2, 3, 5)$.

В силу локальности процедуры нильпотентной аппроксимации, в этом разделе полагаем $M = \mathbb{R}^n$.

### 3.1. Нильпотентная аппроксимация в привилегированных координатах

Рассмотрим систему (1.1), аппроксимируемую в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Алгоритм для вычисления привилегированных координат и построения нильпотентной аппроксимации в точке $x_0$ выглядит следующим образом:

(1) В точке $x_0$ вычисляются вектор роста $(n_1, \dots, n_r)$ и веса $w_1$, $\dots$, $w_n$. Веса определяются из условия $w_j = s$, если

$$n_{s-1} < j \leq n_s,$$

где $n_s = n_s(x_0)$ и $n_0 = 0$.

(2) Выбираются такие векторные поля $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, что их значения в точке $x_0$ образуют базис в касательном пространстве

$$L^r(x_0) = T_{x_0}\mathbb{R}^n$$

и для них выполнено условие

$$\gamma_{n_{s-1}+1}(x), \dots, \gamma_{n_s}(x) \in L^s(x), \;\; s = 1, \dots, r$$

для любой точки $x$ в окрестности точки $x_0$.

(3) Используя исходные координаты $x$, в которых задана система (1.1), вычисляются новые координаты $y$ на пространстве состояний $\mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$\alpha : \qquad y = \Gamma^{(-1)}(x - x_0), \tag{3.1}$$

где $\Gamma$ — это матрица размерности $n \times n$, составленная из элементов $\Gamma_{ij}$, определяемых по формуле:

$$\gamma_j(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \Gamma_{i,j}\ \partial x_i|_{x_0}.$$

(4) Вычисляются функции, задающие привилегированные координаты $z = (z_1, \dots, z_n)$ в окрестности точки $x_0$ по рекуррентной формуле:

$$\lambda : \qquad z_j = y_j + \sum_{k=2}^{w_j - 1} h_k(y_1, \dots, y_{j-1}),\ j = 1, \dots, n$$

, где

$$h_k(y_1, \dots, y_{j-1}) = -\sum_{\substack{|\alpha| = k \\ w(\alpha) < w_j}} m_j \gamma_1^{\alpha_1} \dots \gamma_{j-1}^{\alpha_{j-1}} (y_j + \sum_{q=2}^{k-1} h_q)(x_0),$$

и $m_j = \prod_{i=1}^{j-1} y_i^{\alpha_i}/\alpha_i!$ и $|\alpha| = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_j$.

(5) Динамика исходной системы (1.1) выражается в привилегированных координатах:

$$\dot z = \sum_{i=1}^{m} g_i(z) u_i.$$

(6) Строится разложение в ряд Маклорена векторных полей $g(z)$ и группируются поля одного веса:

$$g_i(z) = g_i^{(-1)}(z) + g_i^{(0)}(z) + g_i^{(1)}(z) + \dots,$$

где $g_i^{(s)}$ — поле веса $s$.

(7) Определяются поля $\hat g_i(z) = g_i^{(-1)}(z)$ и аппроксимирующая система

$$\dot z_j = \sum_{i=1}^{m} \hat g_{ij}(z_1, \dots, z_{j-1}) u_i,\ j = 1, \dots, n,$$

где $\hat g_{ij}$ — однородный полином веса $w_j - 1$.

Так выглядит общий алгоритм построения нильпотентной аппроксимации в привилегированных координатах. Для систем (2.1) с вектором роста $(2,3,5)$ конкретизируется следующим образом.

### 3.2. Аппроксимация систем с вектором роста $(2,3,5)$

Рассмотрим систему (2.1) в пространстве $\mathbb{R}^5$, имеющую в некоторой точке $x_0 \in \mathbb{R}^5$, а потому и в некоторой ее окрестности, вектор роста $(2,3,5)$. Опишем процедуру построения нильпотентной аппроксимации в точке $x_0$.

(1) Вычисляются коммутаторы

$$X_3 = [X_1, X_2], \qquad X_4 = [X_1, X_3], \qquad X_3 = [X_2, X_3].$$

Веса полей $X_1, \ldots, X_5$ соответственно равны $(1,1,2,3,3)$.

(2) В качестве векторных полей $\gamma_i$ выбираются поля $X_i$. Для них выполняются все условия, наложенные в пункте 3.1 на поля $\gamma_i$.

(3) Вычисляются координаты $y_i$ по формуле (3.1). При такой замене точка $x_0$ переходит в начало координат.

(4) Выполняется переход в привилегированные координаты с помощью замены:

$$\begin{aligned}
z_i &= y_i, \qquad i = 1, \ldots, 3,\\
z_4 &= y_4 - \frac{1}{2}(y_1^2\sigma_1 + 2y_1y_2\sigma_2 + y_2^2\sigma_3),\\
z_5 &= y_5 - \frac{1}{2}(y_1^2\sigma_4 + 2y_1y_2\sigma_5 + y_2^2\sigma_6),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= X_1(X_1(y_4))(x_0), \quad \sigma_2 = X_1(X_2(y_4))(x_0), \quad \sigma_3 = X_2(X_2(y_4))(x_0),\\
\sigma_4 &= X_1(X_1(y_5))(x_0), \quad \sigma_5 = X_1(X_2(y_5))(x_0), \quad \sigma_6 = X_2(X_2(y_6))(x_0).
\end{aligned}$$

(5) С использованием разложения векторных полей в ряд Маклорена строится нильпотентная аппроксимация

$$\dot{z} = \sum_{j=1}^{2} \hat{X}_j(z)u_j, \tag{3.2}$$

где

$$\hat{X}_j(z) = X_j^1(0)\frac{\partial}{\partial z_1} + X_j^2(0)\frac{\partial}{\partial z_2} + \left(\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial X_j^3(z)}{\partial z_i}|_{z=0}\ z_i\right)\frac{\partial}{\partial z_3} +$$
$$+\left(\frac{\partial X_j^4(z)}{\partial z_3}|_{z=0}\ z_3 + \frac{\partial^2(X_i^4(z))}{\partial z_1^2}|_{z=0}\ z_1^2 + \frac{\partial^2(X_i^4(z))}{\partial z_2^2}|_{z=0}\ z_2^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2(X_i^4(z))}{\partial z_1 \partial z_2}|_{z=0}\ z_1 z_2\right)\frac{\partial}{\partial z_4} +$$
$$+\left(\frac{\partial X_j^5(z)}{\partial z_3}|_{z=0}\ z_3 + \frac{\partial^2(X_i^5(z))}{\partial z_1^2}|_{z=0}\ z_1^2 + \frac{\partial^2(X_i^5(z))}{\partial z_2^2}|_{z=0}\ z_2^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2(X_i^5(z))}{\partial z_1 \partial z_2}|_{z=0}\ z_1 z_2\right)\frac{\partial}{\partial z_5}, \text{ где } j = 1, 2.$$

(6) Вводится система координат, в которых система (3.2) имеет канонический вид:

$$\begin{cases} \dot{x} &= u_1, \\ \dot{y} &= u_2, \\ \dot{z} &= \frac{1}{2}(xu_2 - yu_1), \\ \dot{v} &= \frac{1}{2}(x^2+y^2)u_2, \\ \dot{w} &= -\frac{1}{2}(x^2+y^2)u_1. \end{cases} \tag{3.3}$$

Каноническая система (3.3) является нильпотентной и имеет вектор роста $(2, 3, 5)$.

Известно [15], что любые две пятимерные нильпотентные системы с вектором роста $(2, 3, 5)$ диффеоморфны. Замена переменных, переводящая одну такую систему в другую, строится следующим образом.

Пусть $X_1, X_2$ — векторные поля первой, а $Y_1, Y_2$ — векторные поля второй нильпотентной системы с вектором роста $(2, 3, 5)$. Построим диффеоморфизм, переводящий поля $X_i$ в окрестности точки $x_0$ в поля $Y_i$ в окрестности $y_0$:

$$\Phi : O(x_0) \to O(y_0), \qquad \Phi_*(X_i) = Y_i.$$

Определим отображения $F$ и $G$ как композицию потоков векторных полей $X_i$ и $Y_i$ соответственно за время $t_i$:

$$F(t_1, \dots, t_5) = e^{t_5 X_5} \circ \dots \circ e^{t_1 X_1}(x_0),$$
$$G(t_1, \dots, t_5) = e^{t_5 Y_5} \circ \dots \circ e^{t_1 Y_1}(y_0).$$

Отображения $F$, $G$ задают канонические координаты второго рода на нильпотентной группе Ли $\mathbb{R}^5$, поэтому являются диффеоморфизмами (см., например, Теорему 3.18.11 [16]). Тогда искомый диффеоморфизм имеет вид

$$\Phi = G \circ F^{-1}.$$

Итак, мы имеем способ задания диффеоморфизма, переводящего поля исходной системы $X_i$ из окрестности точки $x_0$ в поля системы $Y_i$ в окрестности начала координат, нильпотентная аппроксимация которой является канонической системой:

$$\tau = \Phi \circ \lambda \circ \alpha. \tag{3.4}$$

## 4. Алгоритм приближенного решения задачи управления

Предположим, что имеется способ точного решения задачи управления для канонической нильпотентной системы (3.3), а потому и для любой нильпотентной аппроксимации (3.2). Далее в разделах 5, 6 описаны методы вычисления решения этой задачи в классах оптимальных и кусочно-постоянных управлений соответственно.

Опишем итерационный алгоритм приближенного решения задачи управления для системы

$$\dot{x} = u_1 X_1(x) + u_1 X_2(x), \qquad x \in \mathbb{R}^5, \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^5, \tag{4.1}$$

с начальной точкой $p$ и конечной точкой $q$, для достаточно близких точек $p, q \in \mathbb{R}^5$, с заданной погрешностью $\varepsilon > 0$, за время $T > 0$.

(1) По формуле (3.4) вычисляется замена переменных $\tau$, переводящая координаты $x$ исходной системы (4.1) в координаты $z$ канонической нильпотентной системы (3.3).
(2) Вводится обозначение $p^1 = p$.
(3) Вычисляется управление $u^1(t)$, $t \in [0, T]$, переводящее каноническую нильпотентную систему(3.3) из точки $z^1 = \tau(p^1)$ из точки в точку $0 = \tau(q)$.
(4) Вычисляется траектория $x^1(t)$, $t \in [0, T]$, исходной системы (4.1), соответствующая управлению $u^1(t)$, с начальной точкой $x(0) = p^1$.

(5) Если $\|x^1(T) - q\| < \varepsilon$, то задача решена. Иначе принимается $p^2 = x^1(T)$, выполняется переход в пункт (3), и процесс повторяется до достижения условия $\|x^N(T) - q\| < \varepsilon$ на некотором шаге $N$.

(6) Вычисленные управления $u^1(t), \dots, u^N(t)$ объединяются (с помощью стандартной процедуры конкатенации) в одно управление $u(t)$, $t \in [0, T]$, которое и является решением поставленной задачи.

## 5. Точное решение нильпотентной задачи в классе оптимальных управлений

В работах [11–14] исследуется задача оптимального управления для канонической нильпотентной системы (3.3) с краевыми условиями

$$q(0) = 0, \qquad q(T) = q_1, \qquad q = (x, y, z, v, w) \in \mathbb{R}^5, \tag{5.1}$$

и критерием оптимальности

$$l = \int_0^T \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)}\, dt \to \min. \tag{5.2}$$

Экстремальные траектории в задаче (3.3), (5.1), (5.2) параметризованы функциями Якоби. Семейство экстремальных траекторий описывается экспоненциальным отображением

$$\mathrm{Exp} : N \to M = \mathbb{R}^5,$$
$$N = C \times \mathbb{R}_+, \quad C = \{\lambda = (h_1, h_2, h_3, h_4, h_5) \in \mathbb{R}^5 \mid h_1^2 + h_2^2 = 1\},$$
$$\mathrm{Exp}(\lambda, t) = q(t).$$

В работах [12–14] получена верхняя оценка времени разреза, т.е. времени, когда экстремальные траектории теряют оптимальность:

$$t_{\mathrm{cut}}(\lambda) \leq \mathbf{t}(\lambda), \qquad \lambda \in C, \tag{5.3}$$

где $\mathbf{t} : C \to (0, +\infty]$ есть некоторая функция, явно описанная в [14]. Из существования оптимальных управлений, принципа максимума Понтрягина, и оценки (5.3) следует, что для исследования оптимальных решений в задаче (3.3), (5.1), (5.2) следует рассмотреть ограничение экспоненциального отображения

$$\mathrm{Exp} : \widehat{N} \to \widehat{M} = M \setminus \{q_0\}, \tag{5.4}$$
$$\widehat{N} = \{(\lambda, t) \in N \mid t \leq \mathbf{t}(\lambda)\},$$

причем ограничение (5.4) является сюръективным.

Из результатов работ [12–14] следует, что можно выделить открытые всюду плотные подмножества $N' \subset \widehat{N}$, $M' \subset \widehat{M}$, сужение на которые

$$\mathrm{Exp} : N' \to M', \tag{5.5}$$
$$\mathrm{Exp}(u, v, k, \alpha, \beta) = (x, y, z, v, w), \tag{5.6}$$

будет диффеоморфизмом.

Подмножества $N'$, $M'$ описываются следующим образом.

$$M' = \{(x, y, z, v, w) \in \mathbb{R}^5 \mid z \neq 0, \quad V \neq 0\},$$
$$V(x, y, z, v, w) = xv + yw - z\frac{x^2 + y^2}{2},$$

$$N' = \cup_{i=1}^4 L_i,$$
$$L_i = L_i^1 \cup L_i^2, \qquad i = 1, \dots, 4,$$

$$L_1^1 = \{(u, v, k, \alpha, \beta) \mid u \in (0, 3\pi/2),\ g_z(u) > 0,\ g_V^1(u) < 0,\ v \in (0, \pi/2)\},$$
$$L_1^2 = \{(u, v, k, \alpha, \beta) \mid u \in (0, \pi),\ g_V^2(u) < 0,\ v \in (0, \pi/2)\},$$
$$L_2^1 = \{(u, v, k, \alpha, \beta) \mid u \in (0, 3\pi/2),\ g_z(u) > 0,\ g_V^1(u) < 0,\ v \in (\pi/2, \pi)\},$$
$$L_2^2 = \{(u, v, k, \alpha, \beta) \mid u \in (0, \pi),\ g_V^2(u) < 0,\ v \in (-\pi/2, 0)\},$$
$$L_3^1 = \{(u, v, k, \alpha, \beta) \mid u \in (0, 3\pi/2),\ g_z(u) > 0,\ g_V^1(u) < 0,$$
$$v \in (\pi, 3\pi/2)\},$$
$$L_3^2 = \{(u, v, k, \alpha, \beta) \mid u \in (0, \pi),\ g_V^2(u) < 0,\ v \in (0, \pi/2)\},$$
$$L_4^1 = \{(u, v, k, \alpha, \beta) \mid u \in (0, 3\pi/2),\ g_z(u) > 0,\ g_V^1(u) < 0,$$
$$v \in (3\pi/2, 2\pi)\},$$
$$L_4^2 = \{(u, v, k, \alpha, \beta) \mid u \in (0, \pi),\ g_V^2(u) < 0,\ v \in (-\pi/2, 0)\},$$

для всех $L_i^j$ : $\qquad k \in (0, 1),\ \alpha > 0,\ \beta \in [0, 2\pi)$,

где

$$g_z(u, k) = f_z(p, k),\ p = \mathrm{am}(u, k),$$
$$f_z(p, k) = \operatorname{sn} p \operatorname{dn} p - (2\mathrm{E}(p) - p) \operatorname{cn} p,$$
$$g_V^1(u, k) = f_V^1(p, k),\ p = \mathrm{am}(u, k),$$

$$
\begin{aligned}
f_V^1(p,k) = {}& \frac{4}{3}\operatorname{sn} p \operatorname{dn} p\, (-p - 2(1-2k^2+6k^2\operatorname{cn}^2 p)(2\mathrm{E}(p)-p)+\\
&+(2\mathrm{E}(p)-p)^3 + 8k^2 \operatorname{cn} p \operatorname{sn} p \operatorname{dn} p)+\\
&+4\operatorname{cn} p\,(1-2k^2\operatorname{sn}^2 p)(2\mathrm{E}(p)-p)^2,\\
g_V^2(u,k) = {}& f_V^2(p,k),\ p = \operatorname{am}(u,k),\\
f_V^2(p,k) = {}& \frac{4}{3}\{3\operatorname{dn} p\,(2\mathrm{E}(p)-(2-k^2)p)^2 + \operatorname{cn} p\,[8\mathrm{E}(p)^3-\\
&-4\mathrm{E}(p)(4+k^2) - 12\mathrm{E}(p)^2(2-k^2)p + 6\mathrm{E}(p)(2-k^2)^2p^2+\\
&+p(16-4k^2-3k^4-(2-k^2)^3p^2)]\operatorname{sn} p-\\
&-2\operatorname{dn} p\,(-4k^2+3(2\mathrm{E}(p)-(2-k^2)p)^2)\operatorname{sn}^2 p+\\
&+12k^2\operatorname{cn} p(2\mathrm{E}(p)-(2-k^2)p)\operatorname{sn}^3 p - 8k^2\operatorname{sn}^4 p \operatorname{dn} p\},
\end{aligned}
$$

и

$$M' = \cup_{i=1}^4 M_i,$$

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \{(x,y,z,v,w)\in\mathbb{R}^5 \mid z>0, \quad V<0\},\\
M_2 &= \{(x,y,z,v,w)\in\mathbb{R}^5 \mid z<0, \quad V<0\},\\
M_3 &= \{(x,y,z,v,w)\in\mathbb{R}^5 \mid z<0, \quad V>0\},\\
M_4 &= \{(x,y,z,v,w)\in\mathbb{R}^5 \mid z>0, \quad V>0\}.
\end{aligned}
$$

Более того, каждое из отображений

$$\operatorname{Exp}(L_i)\subset M_i, \qquad i=1,\dots,4. \tag{5.7}$$

является диффеоморфизмом (в частности, биекцией).

Таким образом, для нахождения оптимального решения задачи (3.3), (5.1), (5.2) для открытого всюду плотного множества терминальных точек $q_1\in M'$ достаточно научиться обращать отображения (5.7), т.е. решать системы из пяти уравнений вида (5.6) в функциях Якоби от пяти неизвестных $(u,v,k,\alpha,\beta)$.

Подобная проблема была успешно решена для задачи Эйлера об эластиках [17], однако там возникают аналогичные системы из трех уравнений с тремя неизвестными. Для понижения размерности систем (5.6) для (3.3), (5.1), (5.2) будет использована двухпараметрическая группа симметрий этой задачи (вращения и дилатации), описанная в работе [15]. Факторизуя системы уравнений (5.6) по действию этой двумерной группы, получаем системы трех уравнений с тремя неизвестными вида

$$P(u,v,k) = P_1, \tag{5.8}$$

$$Q(u,v,k) = Q_1, \tag{5.9}$$

$$R(u,v,k) = R_1, \tag{5.10}$$

где

$$\begin{aligned}
&P = z/(2r^2), \qquad r^2 = x^2 + y^2,\\
&Q = (xv + yw - zr^2/2)/r^4,\\
&R = (xw - yv)/r^2,
\end{aligned}$$

суть координаты в факторе пространства $M$ по действию двумерной группы симметрий.

Система уравнений (5.8)–(5.10) аналогична системе, возникающей в задаче Эйлера об эластиках [17]. В системе Mathematica [18] разрабатывается программа решения этой системы.

## 6. Точное решение нильпотентной задачи в классе кусочно-постоянных управлений

Другой естественный класс управлений, который можно использовать для точного решения нильпотентной задачи (3.3), — кусочно постоянные управления. Из подсчета параметров ясно, что достаточно рассматривать управления тремя переключениями:

$$u_i = \begin{cases} \alpha_i, \text{ при } t \in [0, \frac{T}{4}],\\ \beta_i, \text{ при } t \in (\frac{T}{4}, \frac{T}{2}],\\ \gamma_i, \text{ при } t \in (\frac{T}{2}, \frac{3T}{4}],\\ \delta_i, \text{ при } t \in (\frac{3T}{4}, T],\end{cases}$$

где $i = 1, 2$.

Для определения коэффициентов управления

$$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$$

необходимо решить систему из пяти уравнений с восемью неизвестными:

$$\begin{cases} x(\alpha_i, \dots, \delta_i) = 0, \\ y(\alpha_i, \dots, \delta_i) = 0, \\ z(\alpha_i, \dots, \delta_i) = 0, \\ v(\alpha_i, \dots, \delta_i) = 0, \\ w(\alpha_i, \dots, \delta_i) = 0, \end{cases}$$

имеющую трехпараметрическое семейство решений. Для любого начального состояния $x_0$ существует способ зафиксировать свободные параметры так, чтобы получалось решение без особенностей.

В системе Mathematica [18] написана программа, определяющая коэффициенты управления из условия минимальности максимума модуля параметров $\alpha_i, \dots, \delta_i$. Таким образом получено точное решение задачи управления для канонической системы, которое можно использовать для приближенного решения исходной системы.

Эти управления были применены для задач управления качением шара и движением машины с прицепами (примеры 1, 2). Соответствующая программа в системе Mathematica продемонстрировала сходимость алгоритма при достаточно малых расстояниях между начальной и конечной точками. Графики координат решений этих задач (в отклонениях от целевой точки) приведены на рис. 1, 2.

Фильм, визуализирующий качение шара, выложен в файле `ftp://univ.u.pereslavl.ru/upload/masht/SphereMov.avi`.

В большой серии проведенных численных экспериментов алгоритм приближенного решения задачи управления для обеих модельных систем («шар на плоскости» и «машина с прицепами») демонстрирует сходимость при достаточно малых расстояниях между исходной и целевой точками при использовании кусочно-постоянных управлений. Заметим, что теоретически такая сходимость алгоритма гарантирована, если для используемого класса управлений $\mathcal{U}$ выполнено следующее топологическое свойство, которое естественно назвать локальной управляемостью системы (1.1) в классе управлений $\mathcal{U}$:

> для любой точки $q_1 \in M$ и для любой ее окрестности $O_1 \subset M$ существует такая окрестность $O_2 \subset O_1$ точки $q_1$, что для любой точки $q_0 \in O_2$ существует управление $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, переводящее точку $q_0$ в $q_1$, причем соответствующая траектория $x(\cdot)$ системы (1.1) содержится в окрестности $O_1$.

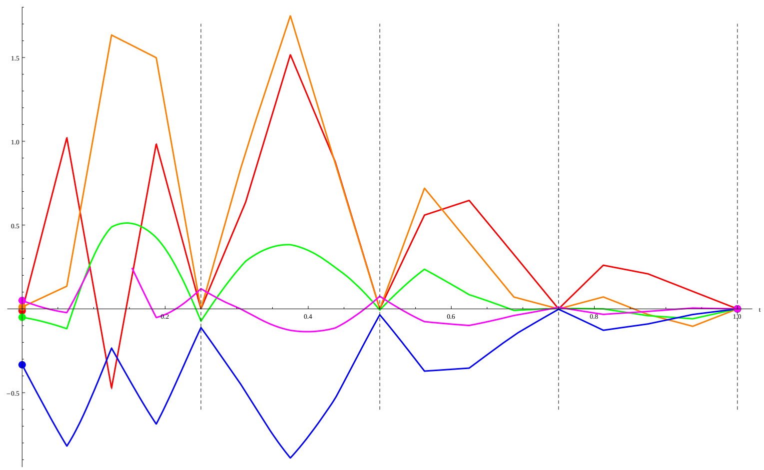


Рис. 1. Траектории системы «шар на плоскости» (в отклонениях)

Из непрерывности субриманова расстояния (1.5) следует, что класс управлений, оптимальных в смысле минимума функционала субримановой длины (1.4), этому свойству удовлетворяет. Для класса кусочно-постоянных управлений, описанных в пункте 6, этот вопрос подлежит изучению.

## 7. Заключение

В работе рассмотрен конструктивный метод приближенного решения задачи управления на основе нильпотентной аппроксимации. Детально рассмотрен случай пятимерных систем с двумерным управлением, в классах оптимальных и кусочно-постоянных управлений. Эффективность алгоритма и компьютерной программы продемонстрирована на системах, описывающих качение шара по плоскости, и движение машины с двумя прицепами.

## Список литературы

[1] Аграчев А. А., Сачков Ю. Л. Геометрическая теория управления. — М.: Физматлит, 2005. — 392 с. ↑1, 1, 1

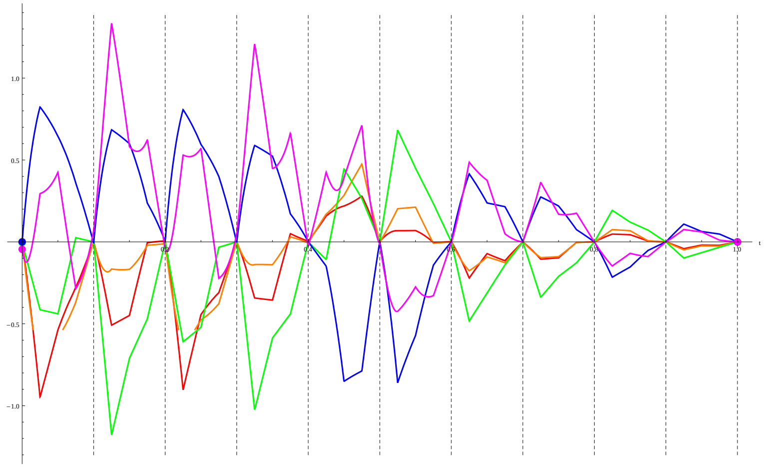

Рис. 2. Траектории системы «машина с прицепами» (в отклонениях)


[2] Jurdjevic V. Geometric control theory. — Cambridge: University Press, 1997. ↑1

[3] Laumond J. P. // Lecture Notes in Control and Information Science, № 229: Springer, 1998. — 343 с. ↑1

[4] Murray R.M., Sastry S.S. *Steering controllable systems* // Proc. 29th IEEE Conf. Dec. and Control. — Honolulu, Hawaii, 1990. ↑1

[5] Fliess M., Levine J., Martin P., Rouchon P. *On differential flat nonlinear systems* // Proc. IFAC NOLCOS Symposium. — Bordeaux, France, 1992, с. 408–412. ↑1

[6] Аграчев А.А., Сарычев А.В. *Фильтрация алгебры Ли векторных полей и нильпотентная аппроксимация управляемых систем* // ДАН СССР. — **295**, 1987, с. 777–781. ↑1, 2

[7] Bellaiche A. *The tangent space in sub-Riemannian geometry.* // Sub-Riemannian Geometry, A. Bellaiche and J. J. Risler, Eds. — Basel, Swizerland: Birkhäuser, 1996, с. 1–78. ↑3

[8] Hermes H. *Nilpotent and high-order approximations of vector fields systems* // SIAM Review. — **33**, 1991, с. 238–264. ↑2

[9] Laferriere G., Sussmann H.J. *A differential geometric approach to motion planning* // Nonholonomic Motion Planning, Zexiang Li and J.F. Canny Eds. — Basel, Swizerland: Kluwer, 1992. ↑

[10] Vendittelli M., Oriolo G., Jean F., Laumond J.-P. *Nonhomogeneous nilpotent approximations for nonholonimic systems with singularities* // IEEE Trans. Automat. Control. — **49**, 2004, с. 261–266. ↑1, 3

[11] Сачков Ю. Л. *Экспоненциальное отображение в обобщенной задаче Дидоны* // Мат. Сборник. — Т. **194**, 2003, с. 63–90. ↑1, 5

[12] Сачков Ю. Л. *Дискретные симметрии в обобщенной задаче Дидоны* // Мат. Сборник. — Т. **197,2**, 2006, с. 95–116. ↑5, 5

[13] Сачков Ю. Л. *Множество Максвелла в обобщенной задаче Дидоны* // Мат. Сборник. — Т. **197,4**, 2006, с. 123–150. ↑

[14] Сачков Ю. Л. *Полное описание стратов Максвелла в обобщенной задаче Дидоны* // Мат. Сборник. — Т. **197,6**, 2006, с. 111–160. ↑1, 5, 5, 5, 5

[15] Sachkov Yu.L. *Symmetries of Flat Rank Two Distributions and Sub-Riemannian Structures* // Transactions of the American Mathematical Society. — Т. **356**, 2004, с. 457–494. ↑3.2, 5

[16] Varadarajan V.S. Lie groups, Lie algebras, and their representations. — New York: Springer-Verlag, 1984. ↑3.2

[17] Ардентов А.А., Сачков Ю. Л. *Решение задачи Эйлера об эластиках* // Автоматика и Телемеханика, 2009, в печати. ↑5, 5

[18] Wolfram S. Mathematica: a system for doing mathematics by computer. — MA: Addison-Wesley, Reading, 1991. ↑5, 6

Исследовательский центр процессов управления ИПС РАН

Yu. L. Sachkov, A. A. Ardentov, A. P. Mashtakov. *Constructive solution to control problem via nilpotent approximation method* // Proceedings of Program Systems institute scientific conference “Program systems: Theory and applications”. — Pereslavl-Zalesskij, v. **1**, 2009. — p. 5–23. — ISBN 978-5-901795-16-3 (*in Russian*).

Abstract. Nilpotent approximation method for nonlinear systems, linear in controls, is described. An algorithm of constructive solving the control problem for such systems on the basis of nilpotent approximations is presented. A realization of the algorithm in classes of optimal and piecewise constant control is considered.