ISBN 978-5-901795-16-3 ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ. Переславль-Залесский, 2009
УДК 519.87

С. А. Амелькин

Определение максимума термодинамической и экономической эффективности работы предприятия

Аннотация. В работе рассмотрено производственное предприятие, работающей в открытой экономической системе. Технологическое оборудование предприятия представляет собой тепловую машину. Требуется определить максимальное значение термодинамической (код тепловой машины) и экономической (рентабельности предприятия) эффективности производства мощности. Получены условия оптимальности для этой задачи.

1. Введение

Максимальная прибыль производственной фирмы может быть достигнута как за счет выбора цен (или объема выпуска товара) при наличии монополистической власти, так и за счет оптимальной организации технологического процесса. Задачи оптимального выбора технологического процесса сводятся к задаче определения минимальных издержек при заданном объеме производства. Решение этой задачи — кривая развития фирмы — позволяет ставить задачу оптимального ценообразования, позволяющего добиться максимума прибыли или предельного значения любого другого экономического критерия.

Подробно исследован случай, когда технологическая линия представляет собой тепломеханическую систему (например, тепловую машину). Исследования в этой области получили название «термоэкономика» [1]. Кривая производственных возможностей в этом случае — это кривая зависимости максимального КПД тепловой машины от ее мощности. На этой кривой выбираются точки, соответствующие максимуму прибыли при постоянных издержках (Рис. 1). На рисунке показана также ось, соответствующая прибыли от реализации мощности при постоянных ценах.

Такой подход не учитывает взаимосвязи между стоимостью ресурсов, требуемых для технологического процесса и параметрами этого процесса: затраты на потоки теплоты не связаны с параметрами

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 08-06-00141.

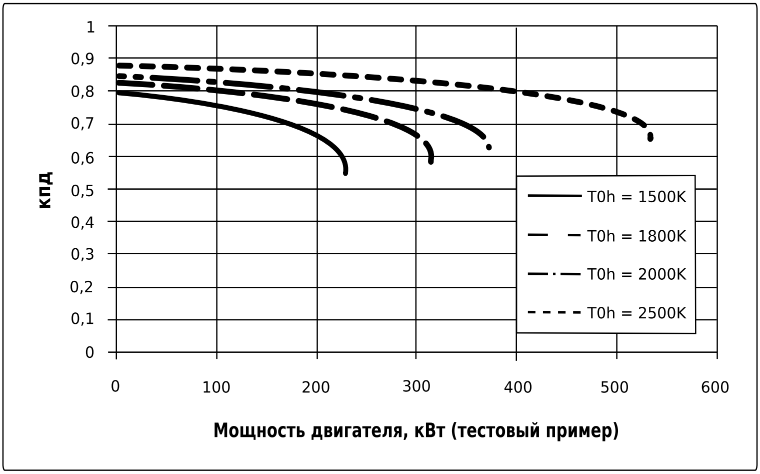

Рис. 1. Зависимость максимального КПД тепловой машины от ее мощности.

этих потоков (температурой источника, площади поверхности контакта рабочего тела с источником), а связаны только с интенсивностью потока, определяемого температурой рабочего тела. Далее рассмотрена задача максимизации термодинамической эффективности (КПД машины) и экономической эффективности (рентабельности производства). Эта задача соответствует микроэкономической задаче определения кривой развития фирмы, то есть зависимости минимальных издержек фирмы от производительности (мощности тепловой машины). Задача рассмотрена для случая, когда

(1) фирма может влиять на цены как целевого потока (мощности), так и потоков теплоты, поступающих и отводимых от рабочего тела;
(2) цены на ресурсы зависят не только от интенсивностей потоков, но и от параметров, входящих в уравнения кинетики.

2. Описание системы

Рассмотрим тепловую машину. Рабочее тело с распределенными параметрами контактирует с двумя источниками с постоянными температурами T_{0h} и T_{0l}. Температуры рабочего тела в контакте с источниками T_{0h} и T_{0l} соответственно. Будем предполагать законы теплопередачи линейными

$$(1) \qquad q_h = \alpha_h(T_{0h} - T_h); \quad q_l = \alpha_l(T_{0l} - T_l).$$

Тепловая машина за счет теплообмена с источниками вырабатывает мощность $n = q_h + q_l$. Предприятие, технологической линией в котором является тепловая машина, покупает теплоту и продает мощность. Предприятие на всех рынках обладает монополистической властью: цены на теплоту p_h, p_l и мощность p_n зависят от интенсивностей потоков. Цены p_h, p_l также зависят от параметров источников тепла, так что $p_h = p_h(q_h, T_{0h})$, $p_l = p_l(q_l, T_{0l})$. Целью предприятия является получить максимальную прибыль π от продажи мощности. Будем рассматривать стационарный режим: интенсивности потоков не изменяются во времени.

3. Алгоритм решения задачи

Задача определения оптимальных технологических параметров решается в три этапа.

На первом этапе для каждого значения n определяются такие величины температур рабочего тела T_{0h}, T_{0l} и потоков теплоты q_h, q_l, которые обеспечивают наибольший КПД тепловой машины. Для этого следует решить задачу минимальной диссипации

$$(2) \qquad \sigma = \frac{q_h(T_{0h}, T_h)}{T_{0h}} + \frac{q_l(T_{0l}, T_l)}{T_{0l}} \to \min_{T_h, T_l}$$

при условии, вытекающем из энергетического баланса рабочего тела

$$(3) \qquad q_h(T_{0h}, T_h) + q_l(T_{0l}, T_l) = n,$$

и условии энтропийного баланса рабочего тела

$$(4) \qquad \frac{q_h(T_{0h}, T_h)}{T_{0h}} + \frac{q_l(T_{0l}, T_l)}{T_{0l}} = 0.$$

На втором этапе требуется найти минимальные издержки предприятия. При заданном значении мощности n и известной зависимости цены готовой продукции $p(n)$ доход предприятия $np(n)$ также задан. Поэтому задача о минимуме издержек идентична задаче о максимальной экономической эффективности — рентабельности предприятия.

$$(5) \qquad c = p_h(q_h, T_{0h})q_h(T_{0h}, T_h^*) + p_l(q_l, T_{0l})q_l(T_{0l}, T_l^*) \to \min_{T_{0h}, T_{0l}},$$

где T_h^*, T_l^* — решение задачи (2)–(4). На этом этапе не требуется учитывать условие (3), т. к. значения T_h^*, T_l^* определены с учетом этого условия и выражения для оптимальных значений этих температур зависят от n.

В задаче (5) учитываются только текущие издержки на приобретение теплоты. В случае если требуется учесть издержки на другие факторы производства (например, на труд, капитал в виде амортизации оборудования и пр.), выражения для этих факторов производства должны быть включены в критерий (5). Впрочем, если эти факторы производства не зависят от температур T_{0h}, T_{0l}, то задача (5) будет сепарабельной. Например, если амортизация оборудования (определяемая капитальными вложениями) c_k зависит от площадей контакта рабочего тела с источниками[1] $c_k = f(\alpha_h, \alpha_l)$, то, наряду с задачей (5), требуется решить задачу

$$f(\alpha_h, \alpha_l) \to \min_{\alpha_h, \alpha_l} \tag{6}$$

при условии либо сохранения общей площади теплообмена

$$\alpha_h + \alpha_l = A, \tag{7}$$

либо сохранения эквивалентного значения коэффициента теплопередачи

$$\frac{\alpha_h \alpha_l}{\alpha_h + \alpha_l} = \alpha_0. \tag{8}$$

Решение этих задач рассмотрено в [2]. Решая задачу минимума издержек при заданной мощности мы получаем решение задачи об эффективности производства — как технологической (КПД машины), так и экономической (рентабельность). В результате решения задач (2)–(4), (5) и (6) получаем зависимость $c(n)$, которая может быть использована на третьем этапе для решения задачи

$$\pi = p(n)n - c(n) \to \max_n . \tag{9}$$

Решение задачи (9) — стандартной для курса микроэкономики — приводит к требованию равенства предельных издержек предельному доходу [3]. Можно решать и другие задачи — например, о предельной мощности. При любом абсолютном критерии на этом этапе решение соответствует максимальным значениям КПД и рентабельности,

[1] Принимаем, что коэффициенты теплопередачи пропорциональны площади контакта с источниками. Тогда можно ограничение на общую площадь теплообмена заменить на требование постоянства суммы коэффициентов теплопередачи.

а, значит, режим работы предприятия относится к классу процессов минимальной диссипации и в термодинамическом, и в экономическом смысле. Рассмотрим задачи каждого этапа подробнее.

4. Задача о минимуме диссипации

Задача о минимуме диссипации при заданном целевом потоке (мощности) (2)—(4) решена в [4]. Там получена зависимость КПД тепловой машины от значения мощности и параметров линейных законов теплопередачи:

$$\eta = 1 - \frac{\alpha(T_{0h} + T_{0l}) - n - \sqrt{(n + \alpha(T_{0h} - T_{0l}))^2 - 4\alpha T_{0h} n}}{2\alpha T_{0h}}, \tag{10}$$

где $\alpha = \alpha_h \alpha_l / (\alpha_h + \alpha_l)$ — эквивалентный коэффициент теплопередачи. В ходе рассматриваемого этапа решения задачи о минимальной диссипации, нас интересуют оптимальные зависимости потоков теплоты от источников к рабочему телу.

Получим эти зависимости. Функция Лагранжа для задачи (2)–(4) имеет вид

$$L = L_h + L_l + \lambda n, \tag{11}$$

где

$$L_i = q_i(T_{0i}, T_i)(\frac{1}{T_{0i}} - \lambda + \frac{\mu}{T_i}), \quad i \in \{h, l\}. \tag{12}$$

Здесь λ, μ — неопределенные множители Лагранжа, соответствующие ограничениям (3), (4). Необходимые условия оптимальности $\partial L/\partial T_i = 0$ $(i \in \{h, l\})$ приводят к равенствам

$$T_i = T_{0i} \sqrt{\frac{\mu}{T_{0i}\lambda - 1}} = T_{0i}(1 - x_i(T_{0i})). \tag{13}$$

Обозначив $x_i(T_{0i}) = 1 - \sqrt{\dfrac{\mu}{T_{0i}\lambda - 1}}$ и подставив найденные значения T_i в условия (3), (4), получим систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_h T_{0h} x_h(T_{0h}) + \alpha_l T_{0l} x_l(T_{0l}) = n; \\ \alpha_h \dfrac{x_h(T_{0h})}{1 - x_h(T_{0h})} + \alpha_l \dfrac{x_l(T_{0l})}{1 - x_l(T_{0l})} = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Выражая из первого уравнения (14) $x_l(x_h)$ и подставляя полученное выражение во второе уравнение (14), получаем квадратное уравнение

$$\alpha_h T_{0h} x_h^2 - \left[n + \frac{\alpha_h \alpha_l}{\alpha_h + \alpha_l}(T_{0h} - T_{0l})\right] x_h + \frac{\alpha_l}{\alpha_h + \alpha_l} n = 0.$$

Введя эквивалентный коэффициент теплопередачи $\alpha = \dfrac{\alpha_h \alpha_l}{\alpha_h + \alpha_l}$, находим значения x_h и x_l, подставляем их в (13), получаем выражения для T_h^* и T_l^*. Найденные значения подставляем в уравнения кинетики (1) и, наконец, находим искомые выражения для теплоты:

$$q_h = \frac{1}{2}[n + \alpha(T_{0h} - T_{0l}) - \sqrt{D}], \quad q_l = \frac{1}{2}[n + \alpha(T_{0h} - T_{0l}) + \sqrt{D}], \tag{15}$$

где

$$D = (n + \alpha(T_{0h} - T_{0l}))^2 - 4\alpha T_{0h} n. \tag{16}$$

5. Задача о минимуме издержек

Зная зависимость потоков теплоты (15), (16) от значений T_{0h}, T_{0l}, можно выписать условия оптимальности для задачи (5)

$$\frac{\partial c}{\partial T_{0h}} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial T_{0l}} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial p_h}{\partial q_h} q_h + p_h\right) \dfrac{\partial q_h}{\partial T_{0h}} + \left(\dfrac{\partial p_l}{\partial q_l} q_l + p_l\right) \dfrac{\partial q_l}{\partial T_{0h}} + \dfrac{\partial p_h}{\partial T_{0h}} q_h = 0, \\ \left(\dfrac{\partial p_h}{\partial q_h} q_h + p_h\right) \dfrac{\partial q_h}{\partial T_{0l}} + \left(\dfrac{\partial p_l}{\partial q_l} q_l + p_l\right) \dfrac{\partial q_l}{\partial T_{0l}} + \dfrac{\partial p_l}{\partial T_{0l}} q_l = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Рассмотрим значения производных $\dfrac{\partial q_i}{\partial T_{0j}}$ $(i, j \in \{h, l\})$. Для этого представим выражения для потоков теплоты в виде

$$q_h = \frac{1}{2}(n + \kappa); \quad q_l = \frac{1}{2}(n - \kappa), \tag{18}$$

где $\kappa = \alpha(T_{0h} - T_{0l}) - \sqrt{D}$. Только κ зависит от значений T_{0h}, T_{0l}. Поэтому

$$\frac{\partial q_h}{\partial T_{0j}} = -\frac{\partial q_l}{\partial T_{0j}} \quad , j \in \{h, l\}, \tag{19}$$

а значит, уравнения (17) могут быть сведены к равенству

$$\frac{\frac{\partial p_h}{\partial T_{0h}} q_h}{\frac{\partial q_h}{\partial T_{0h}}} = -\frac{\frac{\partial p_l}{\partial T_{0l}} q_l}{\frac{\partial q_l}{\partial T_{0l}}}. \tag{20}$$

Надо учесть, что $q_h > 0$, $q_l < 0$, $\dfrac{\partial q_h}{\partial T_{0h}} < 0$, $\dfrac{\partial q_l}{\partial T_{0l}} < 0$. Последние два неравенства требуют пояснений, так как согласно (1) обе эти производные должны быть положительны. Однако, мы рассчитываем эти производные с учетом решения задачи (2)–(4). В этом случае $q_h = q_h(T_{0h}, T_{0l})$; $q_h = q_h(T_{0h}, T_{0l})$, эти зависимости определяются формулами (15)–(16). При увеличении температуры T_{0h} требуется меньший поток теплоты, чтобы обеспечить заданную мощность n; при увеличении температуры T_{0l} требуется большее значение интенсивности отвода теплоты от рабочего тела, а значит меньшее значение q_{0l}.

Из равенства (15) примем, что

$$\operatorname{sign}\left(\frac{\partial p_h}{\partial T_{0h}}\right) = \operatorname{sign}\left(\frac{\partial p_l}{\partial T_{0l}}\right).$$

Это также становится понятным, если учесть, что при $q_l < 0$ требуется, чтобы p_l было также отрицательным. Производные $\dfrac{\partial q_h}{\partial T_{0h}}$ и $\dfrac{\partial q_l}{\partial T_{0l}}$ связаны с интенсивностью потоков q_h и q_l следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_h}{\partial T_0 h} &= \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4\sqrt{D}}\left[2\alpha\left(n + \alpha(T_{0h} - T_{0l}) - 4\alpha n\right)\right] \\ &= \frac{\alpha}{2}\left[1 + \frac{n - \alpha(T_{0h} - T_{0l})}{\sqrt{D}}\right] = \frac{\alpha q_l}{\sqrt{D}}; \\ \frac{\partial q_l}{\partial T_0 l} &= \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4\sqrt{D}}\left[-2\alpha\left(n + \alpha(T_{0h} - T_{0l})\right)\right] \\ &= \frac{\alpha}{2}\left[1 - \frac{n + \alpha(T_{0h} - T_{0l})}{\sqrt{D}}\right] = -\frac{\alpha q_h}{\sqrt{D}}. \end{aligned} \tag{21}$$

С учетом (21) равенство (20) примет вид

$$\left(\frac{q_l}{q_h}\right)^2 = \frac{\partial p_l/\partial T_{0l}}{\partial p_h/\partial T_{0h}}, \tag{22}$$

откуда с учетом отрицательности величины q_l:

$$\frac{q_l}{q_h} = -\sqrt{\frac{\partial p_l/\partial T_{0l}}{\partial p_h/\partial T_{0h}}} \quad \text{или} \quad \eta = 1 + \frac{q_l}{q_h} = 1 - \sqrt{\frac{\partial p_l/\partial T_{0l}}{\partial p_h/\partial T_{0h}}}. \tag{23}$$

Уравнение (23) является условием оптимальности для выбора таких значений T_{0h}, T_{0l}, чтобы экономическая эффективность предприятия была бы наибольшей, а, значит, наименьшей — диссипация капитала [2].

Интересно, что для выбора функций спроса и предложения (кинетики ресурсообмена в экономической системе), определяющих зависимость цен от интенсивностей потоков и величин температур источников T_{0j} $j \in \{h, l\}$, удобно воспользоваться следующими зависимостями

$$p_j = v_j - \frac{p_j q_j(T_{0h}, T_{0l})}{T_{0j}}, \quad j \in \{h, l\}. \tag{24}$$

Такая зависимость связывает цену с потоком энтропии, отбираемым от j-го источника. К сожалению, расчет значений T_{0h}, T_{0l} для зависимостей (24), удовлетворяющих условиям (23), а значит и решение задач третьего этапа аналитически невозможно — требуется численный расчет для конкретных значений α, β_h, β_l, v_h, v_l, а также заданной функции спроса $p(n)$.

Список литературы

[1] Sieniutycz S., Salamon P. Finite-time thermodynamics and thermoeconomics. — London: Taylor & Francis, 1990. ↑1

[2] Миронова В. А., Амелькин С. А., Цирлин А. М. Математические методы термодинамики при конечном времени. — М.: Химия, 2000. ↑3, 5

[3] Пиндайк Р., Рубинфельд Д. Микроэкономика. — М.: Экономика. Дело, 1992. ↑3

[4] Цирлин А. М. Оптимальные циклы и циклические режимы. — М.: Энергоатомиздат, 1985. ↑4

Исследовательский центр системного анализа ИПС РАН

S. A. Amelkin. *Maximum of thermodynamic and economic efficiency of an industrial enterprise* // Proceedings of Program Systems institute scientific conference “Program systems: Theory and applications”. — Pereslavl-Zalesskij, v. **1**, 2009. — p. 77–84. — ISBN 978-5-901795-16-3 (*in Russian*).

Abstract. An industrial enterprise operating in an open economic system is considered. Technological equipment of the enterprise ia a heat engine. The problem at issue is to determine both thermodynamic and economic efficiencies of the enterprise. Optimality conditions for the problem are obtained.