

А. А. Ахременков, В. А. Казаков, А. М. Цирлин  
**Алгоритм оптимизации рынков электроэнергии  
как макросистем**

Аннотация. Рассмотрена задача оптимизации торговли на взаимосвязанных энергетических рынках с учетом особенностей этих рынков. Получены её условия оптимальности и численный метод решения, основанный на их использовании. Показана возможность построения системы автоматической оптимизации.

## 1. Введение

Рынок электроэнергии включает некоторое число региональных рынков, соединенных между собой линиями межрегиональных передач. Каждый участник рынка (производитель или потребитель) входит в состав одного из региональных рынков, на котором все участники платят или получают плату за энергию по единой региональной цене. Как правило, региональные цены различаются между собой.

Торговый день на рынке энергии разделен на последовательность равных периодов, в каждом из них проводится «аукцион одного периода». Таким образом энергетический рынок представляет собой совокупность проходящих одновременно связанных региональных аукционов. Результаты аукциона зависят от ценовых заявок производителей-поставщиков энергии, состояния рынка перед началом аукциона (объемов региональных поставок и межрегиональных потоков), а также региональных спросов на энергию. Эти результаты определяют объемы поставок на рынок для каждого производителя энергии во всех регионах, объемы межрегиональных потоков, а также региональные цены на данный расчетный период.

Все производители энергии подают оператору свои ценовые заявки («предложения поставок») до начала аукциона. Эти предложения представляют собой ступенчатые возрастающие функции зависимости цены энергии от объемов ее поставки (рис. 1). Ценовые ступеньки на этих функциях могут быть (и часто действительно бывают) отрицательными, что соответствует согласию производителя оплачивать

покупателю поставляемую энергию в связи с тем, что ему невыгодно останавливать генераторы.

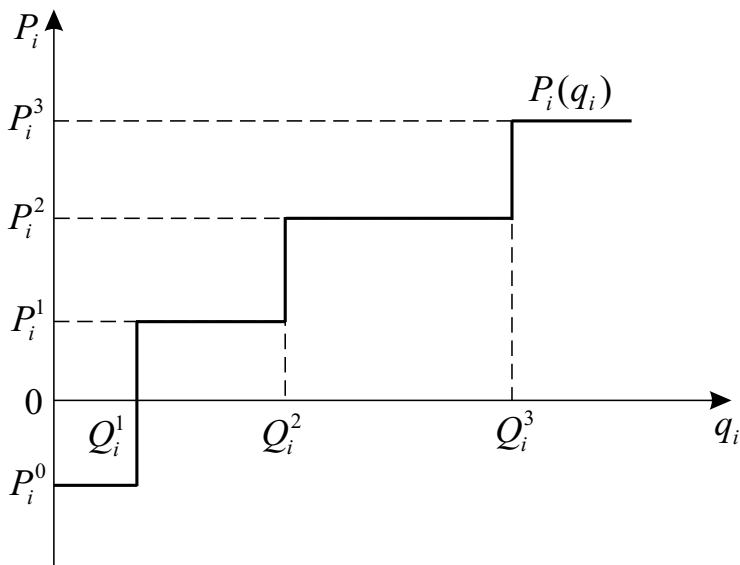


Рис. 1. Вид ценовых заявок производителей.

Региональный аукцион является аукционом единой цены, т. е. каждый из поставщиков в этом регионе получает единую цену за поставляемую энергию. Обычно предполагается, что рассматриваемый рынок является олигополистическим, где ценовые заявки участников определяют распределение поставок, текущие и региональные цены. Спрос предполагают не зависящим от цены (эластичность спроса близка к нулю). Ценовые заявки производителей для всех аукционов одного торгового дня подаются одновременно перед его началом. Количество ступеней заявок не должно превышать заданного числа (так, для Австралии это 10). Эти ценовые заявки используются на всех аукционах одного периода на протяжении данного торгового дня (см. [1, 2]).

Региональные цены и объемы поставок определяются не только спросом на электроэнергию и ценовыми заявками производителей, но и выбором объемов энергии, поставляемым по линиям электропередач, соединяющим региональные рынки, потерями в этих линиях и

их возможностями. Целью каждого регионального аукциона является минимизация стоимости поставляемой энергии. Ниже рассмотрена задача оптимального распределения поставок между генераторами в рамках рынка электроэнергии.

Задачи оптимального распределения генерации электроэнергии на протяжении десятилетий находились в центре многих исследований, как академических, так и прикладных (см. [3, 4]). При этом стоимость генерации, являвшаяся целевой функцией в классических задачах оптимального распределения, как правило предполагалась непрерывной и непрерывно дифференцируемой. Изложенный ниже алгоритм учитывает влияние ступенчатого характера ценовых заявок на рыночную стоимость генерации и невыпуклость задачи распределения, связанную с тем, что заявки предполагают отрицательные цены.

Используемая модель является существенно упрощенной. В частности, в ней потоки энергии полагают скалярными величинами. Она упрощенно характеризует процессы в цепи электропередач несимметричной функцией потерь, параметры которой периодически уточняют по экспериментальным данным. В то же время эта модель описывает поведение рынка с точностью, необходимой для эффективного управления. В настоящее время задача оптимального распределения поставок и ценообразования на большинстве оптовых рынков электроэнергии решается на основе подобной модели. Как правило её сводят к задаче линейного программирования путем линеаризации целевой функции и ограничений с использованием соответствующих численных методов [1, 2]. Разрывы градиентов и невыпуклость задачи существенно снижают эффективность этих методов, а также могут приводить к остановке алгоритма в локальных экстремумах, не являющихся оптимальными решениями.

В данной работе изложены методы решения задачи оптимального распределения поставок энергии на многорегиональном аукционе, пригодные для преодоления как проблемы разрывов градиента целевой функции, так и невыпуклости задачи. Первоначально приведена математическая модель задачи, для нее получены необходимые условия оптимальности и алгоритм решения системы уравнений, вытекающих из необходимых условий; затем сформулированы достаточные

условия оптимальности, которые позволяют найти оценку снизу глобального экстремума, а также получить сравнительную оценку любого решения задачи оптимального распределения поставок относительно глобального экстремума; предложен способ построения системы с обратной связью для управления в реальном времени.

## 2. Аукцион одного периода. Задача оптимального распределения поставок

### 2.1. Постановка задачи

Рассматривается сеть из  $n$  взаимосвязанных региональных рынков электроэнергии (Рис. 2). В начале каждого торгового периода оператор получает следующую информацию:

1. Объединенную заявку на потребность в энергии каждого из регионов  $d_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .
2. Объединенную региональную ценовую заявку  $P_i(q_i)$  всех поставщиков энергии данного региона.
3. Объемы выработки в регионах  $q_i(0)$ .
4. Объемы межрегиональных потоков энергии за предшествующий период  $g_{ij}(0)$ .

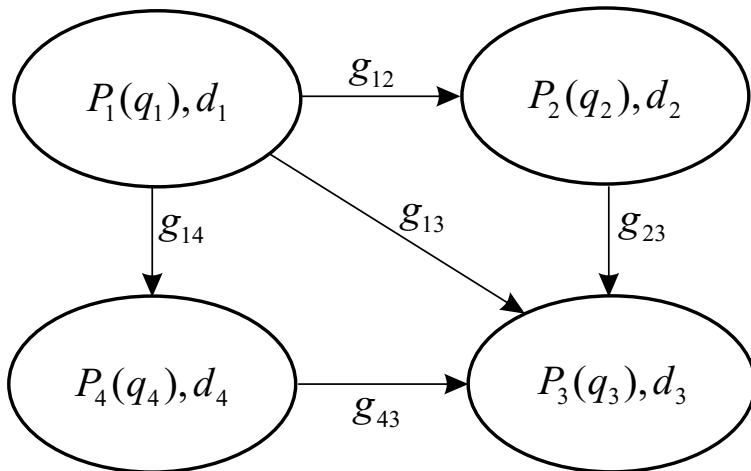


Рис. 2. Фрагмент сети региональных рынков.

Региональная ценовая заявка определяется как зависимость цены  $P_i$  от суммарного объема энергии, который предложен всеми поставщиками данного региона по цене, не превышающей  $P_i$ . Так что

$$(1) \quad q_i = \sum_{\gamma=1}^{\gamma=G_i} \Delta_{i\gamma}, \quad \Delta_{i\gamma} = \max \Delta / R_{i\gamma}(\Delta) \leq P_i.$$

Последнее равенство позволяет поставить в соответствие выбранному значению энергии, генерируемой поставщиками регионального рынка, объемы, закупаемые у каждого из них. Число региональных поставщиков  $G_i$  а  $R_{i\gamma}(\Delta)$  – их ценовые заявки.

Функции  $P_i(q_i)$  являются непрерывными справа,

$$\lim_{q_i \rightarrow Q_i^j} P_i(q_i) = P_i^j.$$

На объемы региональных поставок наложены автономные ограничения  $q_i^{min} \leq q_i \leq q_i^{max}$ . На межрегиональные объемы поставок  $g_{ij}$  из  $i$ -го в  $j$ -ый регион также наложены ограничения,  $g_{ij}^{min} \leq g_{ij} \leq g_{ij}^{max}$ . Они учитывают как технологические возможности поставщиков-генераторов по объемам выработки, так и их «динамические» возможности по скорости изменения объемов поставок. Отметим, что  $g_{ij} = -g_{ji}$ .

Предполагается, что передача объема  $g_{ij}$  из  $i$ -го в  $j$ -ый региональный рынок связана с потерями энергии. Эти потери могут быть охарактеризованы непрерывной монотонно возрастающей функцией  $L_{ij}(g_{ij})$ , для которой справедливы соотношения:

$$L_{ij}(g_{ij}) = L_{ji}(-g_{ij}) = L_{ji}(g_{ji}), \quad L_{ii}(x) \equiv 0, \quad L_{ij}(0) = 0, \quad L_{ij} > 0$$

для  $g_{ij} \neq 0$  и  $\frac{d^2 L_{ij}}{d^2 g_{ij}} > 0$  для  $\forall g_{ij} \neq 0$ . Характер зависимости  $L_{ij}(g_{ij})$  от  $g_{ij}$  показан на Рис. 3.

Потери  $L_{ij}$  делятся между соответствующими региональными рынками в заданном соотношении и создают дополнительный спрос на энергию  $\alpha_{ij} L_{ij}$  в  $i$ -ом регионе и  $\alpha_{ji} L_{ij}$  в  $j$ -ом регионе.  $\alpha_{ij}$  константы,  $0 \leq \alpha_{ij} \leq 1$ ,  $\alpha_{ji} = 1 - \alpha_{ij}$ ,  $\alpha_{ii} = 0$ .

Баланс энергии для такой сети описывается уравнением

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n q_i = \sum_{i=1}^n d_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^n L_{ij}(g_{ij}).$$

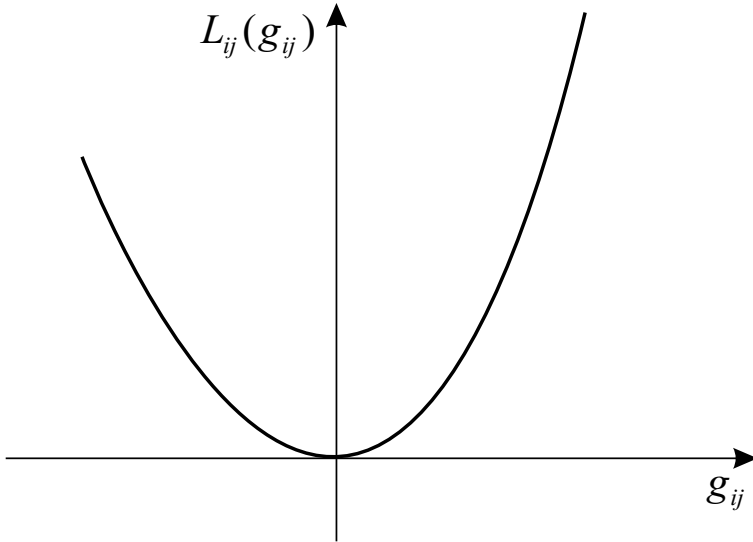


Рис. 3. Зависимость потерь энергии  $L_{ij}$  от величины межрегиональных потоков  $g_{ij}$ .

Поскольку  $g_{ij} = -g_{ji}$  и  $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 1$ ,  $\forall i, j = 1, \dots, n$  баланс сети выполняется, если выполнены региональные балансы

$$(3) \quad q_i = d_i + \sum_{j=1}^n (g_{ij} + \alpha_{ij} L_{ij}(g_{ij})), \quad i = 1, \dots, n.$$

Наряду с объединенной ценовой заявкой поставщиков  $i$ -го рынка введем объединенную стоимостную заявку  $C_i(q_i)$ , как зависимость стоимости энергии всех поставщиков от ее объема.

Стоимость генерации на  $i$ -ом рынке описывается соотношением

$$(4) \quad C_i(q_i) = \int_0^{q_i} P_i(x) dx.$$

Для непрерывной ценовой заявки  $P_i(x)$

$$(5) \quad \frac{dC_i}{dq_i} = P_i(q_i).$$

Так как  $P_i(q_i)$  — монотонные, кусочно-постоянные неубывающие функции, непрерывные справа, то  $C_i(q_i)$  являются выпуклыми, кусочно-линейными, их производная в точке излома равна ее большему значению. Аналогичная стоимостная заявка может рассматриваться и для каждого поставщика на региональном рынке.

Общая стоимость генерации всеми поставщиками на рынке электроэнергии определяется как

$$(6) \quad I(d_1, \dots, d_n, q_i, \dots, q_n) = \sum_{i=1}^n C_i(q_i).$$

Оптимальное распределение поставок соответствует минимуму целевой функции  $I$  по  $q_i, g_{ij}$

$$(7) \quad I(d_1, \dots, d_n, q_i, \dots, q_n) \rightarrow \min_{q_i, g_{ij}}$$

с учетом автономных ограничений

$$(8) \quad q_i^{min} \leq q_i \leq q_i^{max}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$(9) \quad g_{ij}^{min} \leq g_{ij} \leq g_{ij}^{max} \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, n$$

и балансов региональных рынков (3). Последние соотношения включают нелинейные функции, что приводит к невыпуклости задачи.

В дальнейшем будем называть эту задачу «Задачей оптимального распределения поставок для аукциона одного периода». Обозначим составляющие ее решения как  $q_i^*, g_{ij}^*$ , а минимум целевой функции (минимальную общую стоимость поставки) как

$$(10) \quad I^*(d_1, \dots, d_n) = I(d_1, \dots, d_n, q_i^*, \dots, q_n^*, g_{ij}^*).$$

Стоимость поставки  $I$  и ее минимальная величина  $I^*$  зависят не только от  $d_i$ , но и от ценовых заявок  $P_i(q_i)$ , а также от предаукционного состояния рынка — текущих значений  $q_i(0)$  и  $g_{ij}(0)$  (через автономные ограничения, наложенные на  $q_i$  и  $g_{ij}$ ).

Неизвестными величинами в задаче оптимального распределения поставок (7), (8), (9), (3) являются региональные объемы поставок и объемы межрегиональных потоков. Если в сети оптового рынка все региональные рынки связаны между собой линиями передач, то общее число неизвестных задачи равно

$$\frac{n^2 - n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \geq 0.$$

Первое слагаемое этого выражения соответствует числу потоков  $g_{ij}$ , а второе — числу региональных поставщиков.

Поскольку эти переменные должны удовлетворять  $n$  уравнениям баланса (3), то число свободных переменных в задаче оптимального распределения поставок равно числу межрегиональных потоков энергии  $\frac{n(n-1)}{2}$  для сети, где все региональные рынки связаны между собой. Для  $n = 1$  получается единственная свободная переменная, для  $n = 3$  — три, и т.д.

## 2.2. Необходимые условия оптимальности

Исключив по условиям (3) региональные объемы поставок энергии, задачу оптимального распределения поставок (7), (8), (3) можно записать как задачу нелинейного программирования

$$(11) \quad \sum_{i=1}^n C_i \left[ d_i + \sum_{j=1, i \neq j}^n (g_{ij} + \alpha_{ij} L_{ij}(g_{ij})) \right] \rightarrow \min_{g_{ij}}$$

при выполнении следующих неравенств

$$(12) \quad q_i^{\min} \leq d_i + \sum_{j=1, i \neq j}^n (g_{ij} + \alpha_{ij} L_{ij}(g_{ij})) \leq q_i^{\max}$$

и автономных ограничений

$$(13) \quad g_{ij}^{\min} \leq g_{ij} \leq g_{ij}^{\max} \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Независимыми переменными задачи являются объемы межрегионального обмена энергией  $g_{ij}$ . Региональные выработки (поставки) рассчитывают из уравнений баланса (3). Обозначим ее решение как  $g_{ij}^*$ . Это решение является вектор-функцией потребления  $d_1, \dots, d_n$ .

**Автономные ограничения выполнены, расчет производится в пределах интервала непрерывности ценовой заявки.** Начинаем рассмотрение со случая, когда все автономные ограничения не активны, т.е. в точке оптимума

$$(14) \quad q_i^{\min} < d_i + \sum_{j=1, i \neq j}^n (g_{ij} + \alpha_{ij} L_{ij}(g_{ij})) < q_i^{\max}$$

и

$$(15) \quad g_{ij}^{\min} < g_{ij} < g_{ij}^{\max}.$$



Допустим, что  $q_i$  - точки, где функции  $P_i(q_i)$  непрерывны. Тогда из условия стационарности  $I$  по  $g_{ij}$  получаем для двух взаимосвязанных регионов:

$$(16) \quad \frac{\partial I}{\partial g_{ij}} = 0 \Rightarrow \frac{dC_i}{dq_i} \left(1 + \alpha_{ij} \frac{dL_{ij}}{dg_{ij}}\right) = -\frac{dC_j}{dq_j} \left(-1 + \alpha_{ji} \frac{dL_{ij}}{dg_{ij}}\right).$$

Здесь принято во внимание, что  $g_{ij} = -g_{ji}$ . С учетом (4) получаем

$$(17) \quad \left(1 + \alpha_{ij} \frac{dL_{ij}}{dg_{ij}}\right) P_i^* = \left(1 - \alpha_{ji} \frac{dL_{ij}}{dg_{ij}}\right) P_j^*.$$

Здесь  $P_i^* = P_i(q_i^*)$  и  $P_j^* = P_j(q_j^*)$  — цены, соответствующие выбранным суммарным объемам поставок в ценовых заявках для регионов  $i$  и  $j$  соответственно.

Назовем в этих уравнениях величины, стоящие в левой и правой частях равенства (17), *скорректированными ценами* в одном регионе относительно другого, связанного с ним прямой межрегиональной линией передачи энергии. Для  $i$ -го региона по отношению к  $j$ -ому это

$$(18) \quad \bar{P}_{ij} = \left(1 + \alpha_{ij} \frac{dL_{ij}}{dg_{ij}}\right) P_i^*,$$

а для  $j$ -го по отношению к  $i$ -му соответственно

$$\bar{P}_{ji} = \left(1 - \alpha_{ji} \frac{dL_{ij}}{dg_{ij}}\right) P_j^*.$$

Следовательно, потоки между двумя регионами в режиме, который соответствует неактивным автономным ограничениям и участкам непрерывности функций ценовых заявок, могут быть оптимальны в том и только в том случае, если скорректированные цены в этих регионах равны

$$(19) \quad \bar{P}_{ij} = \bar{P}_{ji}.$$

### Генерирование в точках скачка цены на ценовой заявке.

Допустим, что генерированию в объеме  $q_j$  соответствует точка на ценовой заявке, где цена изменяется скачком. Тогда пределы скорректированных цен слева и справа от нее равны  $\bar{P}_{ji} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} P_j(q_j + \epsilon)(1 - \alpha_{ji} L'_{ij})$ ,  $\bar{P}_{ji}^- = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} P_j(q_j - \epsilon)(1 - \alpha_{ji} L'_{ij})$ , и  $\bar{P}_{ij} < \bar{P}_{ji}$  (см. Рис. 4). Таким образом, отрицательная вариация  $\delta g_{ij} < 0$  увеличивает цену поставки  $\delta I = (\bar{P}_{ij} - \bar{P}_{ji}) \delta g_{ij} > 0$ .

Бесконечно малая правая вариация  $\delta g_{ij} > 0$  может привести к двоякому результату. Если предел слева для приведенной цены на  $j$ -ом рынке все еще выше, чем на  $i$ -ом,  $\bar{P}_{ij} < \bar{P}_{ji}$ , то цена поставки испытает скачок, который приведет к положительному изменению  $\delta I = (\bar{P}_{ji} - \bar{P}_{ij})\delta g_{ij}$ . После чего можно продолжать улучшение критерия  $I$  увеличением потока  $g_{ij}$  (см. выше).

Если  $\bar{P}_{ij} > \bar{P}_{ji}$ , то никакие изменения  $g_{ij}$  не могут улучшить  $I$ . Таким образом, условие оптимальности для случая, когда автономные ограничения не активны, а один из генераторов работает при нагрузке, соответствующей скачку на функции ценовой заявки, имеет вид

$$(20) \quad \bar{P}_{ji}^- < \bar{P}_{ij} < \bar{P}_{ji}.$$

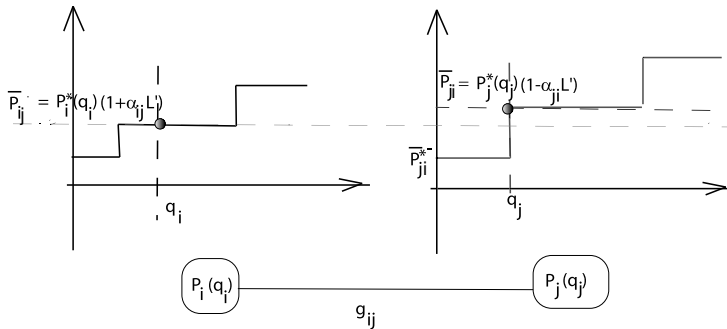


Рис. 4. Вид распределения, которое невозможно улучшить изменением межрегиональных потоков  $g_{ij}$ .

**Общие условия оптимальности для неактивных автономных ограничений.** Аналогичный анализ условий, при которых гарантировано неухудшение целевой функции  $I$  путем вариации межрегиональных потоков, приводит к следующим общим условиям оптимальности задачи (11)–(13) при неактивных автономных ограничениях

$$(21) \quad \bar{P}_{ij}^+ \leq \bar{P}_{ji}^- \quad \bar{P}_{ij}^- \geq \bar{P}_{ji}^+, \quad g_{ij}^{\min} < g_{ij} < g_{ij}^{\max}, \\ q_i^{\min} < d_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n (g_{ij} + \alpha_{ij} L_{ij}(g_{ij})) < q_i^{\max}.$$

Здесь предполагается, что левый и правый пределы приведенных цен описываются как

$$\bar{P}_{ab}^+ = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} P_{ab}(q_i + \epsilon), \quad \bar{P}_{ab}^- = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} P_{ab}(q_i - \epsilon).$$

**Необходимые условия оптимальности для случая активных автономных ограничений.** Если  $g_{ij} = g_{ij}^{max}$ , или  $q_i = q_i^{max}$  или  $q_j = q_j^{min}$ , то допустимы только отрицательные изменения  $\delta g_{ij} < 0$ , и условия неувлучшаемости  $I$  при таких изменениях имеют вид

$$(22) \quad \bar{P}_{ij} \geq \bar{P}_{ji}.$$

Аналогично, если  $g_{ij} = g_{ij}^{min}$ , или  $q_i = q_i^{max}$  или  $q_j = q_j^{min}$ , то распределение является оптимальным только в случае, когда

$$(23) \quad \bar{P}_{ij} \leq \bar{P}_{ji}.$$

Это позволяет сформулировать следующее У т в е р ж д е н и е:

Если  $\{g_{ij}^*\}$  оптимальное решение задачи (11)–(13), то выполнены условия

Нестрогие двусторонние ограничения

$$(24) \quad \begin{aligned} & g_{ij}^{min} < g_{ij} < g_{ij}^{max}, \\ & q_i^{min} < d_i + \sum_j (g_{ij} + \alpha_{ij} L_{ij}(g_{ij})) < q_i^{max}, \\ & q_j^{min} < d_j + \sum_i (-g_{ij} + (1 - \alpha_{ij}) L_{ij}(g_{ij})) < q_j^{max}, \\ & \bar{P}_{ij}^+ \geq \bar{P}_{ji}^-, \quad \bar{P}_{ij}^- \leq \bar{P}_{ji}^+. \end{aligned}$$

Ограничения на потоки

$$(25) \quad \begin{aligned} & g_{ij} = g_{ij}^{max}, \\ & q_i^{min} < d_i + \sum_j (g_{ij} + \alpha_{ij} L_{ij}(g_{ij})) < q_i^{max}, \\ & q_j^{min} < d_j + \sum_i (-g_{ij} + (1 - \alpha_{ij}) L_{ij}(g_{ij})) < q_j^{max}, \\ & \bar{P}_{ij}^- \leq \bar{P}_{ji}^+, \end{aligned}$$

или

$$(26) \quad \begin{aligned} & g_{ij} = g_{ij}^{min}, \\ & q_i^{min} < d_i + \sum_j (g_{ij} + \alpha_{ij} L_{ij}(g_{ij})) < q_i^{max}, \\ & q_j^{min} < d_j + \sum_i (-g_{ij} + (1 - \alpha_{ij}) L_{ij}(g_{ij})) < q_j^{max}, \\ & \bar{P}_{ij}^+ \geq \bar{P}_{ji}^-. \end{aligned}$$

Строгие ограничения (А)

$$(27) \quad g_{ij}^{min} < g_{ij} < g_{ij}^{max}, \quad \bar{P}_{ij}^- \leq \bar{P}_{ji}^+,$$

$$q_i^{min} = d_i + \sum_j (g_{ij} + \alpha_{ij} L_{ij}(g_{ij})), \quad \text{или}$$

$$q_j^{max} = d_j + \sum_j (-g_{ij} + (1 - \alpha_{ij}) L_{ij}(g_{ij}))$$

или (В)

$$(28) \quad g_{ij}^{min} < g_{ij} < g_{ij}^{max}, \quad \bar{P}_{ij}^+ \geq \bar{P}_{ji}^-,$$

$$q_i^{max} = d_i + \sum_j (g_{ij} + \alpha_{ij} L_{ij}(g_{ij})), \quad \text{или}$$

$$q_j^{min} = d_j + \sum_j (-g_{ij} + (1 - \alpha_{ij}) L_{ij}(g_{ij})).$$

**Многорегиональные условия оптимальности.** Рассмотрим линейную часть сети, состоящую из трех региональных рынков. Допустим, что

$$\bar{P}_{ij} < \bar{P}_{ji}, \quad \bar{P}_{jk} < \bar{P}_{kj}, \quad q_j^* = q_j^{max}.$$

Поток энергии направлен из  $i$ -го в  $j$ -ый и далее из  $j$ -го в  $k$ -ый рынок. Автономное ограничения на объем генерации на  $j$ -ом рынке активно, что исключает увеличение  $g_{ij}$ . Однако две одновременные положительные вариации  $\delta g_{ij} = \delta g_{jk} > 0$  допустимы. Анализ, аналогичный проведенному выше, для фрагмента сети, состоящего из соединения двух региональных рынков, приводит к следующим условиям оптимальности для участков непрерывности функций  $P_i(\cdot)$  и  $P_k(\cdot)$  при неактивных ограничениях на  $q_i$  и  $q_k$ :

$$(29) \quad P_i(1 - \alpha_{ij} L'_{ij})(1 - \alpha_{jk} L'_{jk}) = P_k(1 + \alpha_{ij} L'_{ij})(1 + \alpha_{jk} L'_{jk})$$

и к общим условиям оптимальности для точек скачкообразного изменения цены на функциях  $P_i(\cdot)$  и  $P_k(\cdot)$

$$(30) \quad \begin{aligned} P_i^+(1 - \alpha_{ij} L'_{ij})(1 - \alpha_{jk} L'_{jk}) &\leq P_k^-(1 + \alpha_{ij} L'_{ij})(1 + \alpha_{jk} L'_{jk}), \\ P_i^-(1 - \alpha_{ij} L'_{ij})(1 - \alpha_{jk} L'_{jk}) &\geq P_k^+(1 + \alpha_{ij} L'_{ij})(1 + \alpha_{jk} L'_{jk}). \end{aligned}$$

Для активных автономных ограничений эти локальные условия оптимальности имеют тот же вид, что и условия оптимальности для двухрегиональной системы, полученные выше, однако в этих условиях фигурируют многорегиональные приведенные цены (которые определены левыми и правыми частями равенств (29)) вместо локальных приведенных цен (18). Эти условия устанавливают, что в задаче об оптимальном распределении два региональных рынка, связанных между собой в сети через несколько региональных рынков с активными ограничениями на генерирование, могут иметь различные

многорегиональные приведенные цены только в том случае, если по меньшей мере один из потоков между ними, либо объем генерации на одном из рынков вышел на активное ограничение.

### 3. Проблема определения глобального минимума в задаче оптимального распределения поставок энергии

Одной из главных особенностей задачи оптимального распределения поставок (7), (8), (9), (3) является невыпуклость ее целевой функции из-за (возможного) наличия отрицательных ступеней на функциях ценовых заявок и как следствие ее многоэкстремальность. Таким образом, при использовании полученных выше необходимых условий оптимальности, или при использовании прямого поиска минимума стоимости поставки из произвольного начального приближения не гарантируется определение глобального минимума целевой функции. Следовательно, в этих случаях необходимо проверять, является ли полученное решение глобальным или локальным экстремумом, и если минимум оказывается локальным, то сильно ли он отличается от глобального и какое улучшение целевой функции в единицах стоимости поставки возможно при дальнейшем продолжении поиска.

Рассмотрим расширение задачи оптимального распределения (7), (8), (9), (3) за счет исключения автономных ограничений (9) и уравнений связи (3). Она приобретает вид

$$(31) \quad I(d_1, \dots, d_n, q_i, \dots, q_n) = \sum_{i=1}^n C_i(q_i) \rightarrow \min_{q_i}$$

при условиях

$$(32) \quad \sum_i q_i = M,$$

$$(33) \quad q_i^{min} \leq q_i \leq q_i^{max}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Здесь  $M$  — параметр, равный суммарным потерям энергии при межрегиональных передачах, на который наложены автономные ограничения

$$(34) \quad \sum_i q_i^{min} \leq \sum_i d_i \leq M \leq \sum_i q_i^{max}.$$

Введем в рассмотрение функцию Беллмана (см. [6]), используя следующее рекуррентное соотношение

$$(35) \quad \phi_1(x_1) = C_1(x_1), \quad \phi_2(x_2) = \min_{q_2^{min} \leq q_2 \leq q_2^{max}} [C_2(q_2) + \phi_1(x_2 - q_2)],$$

$$\phi_\nu(x_\nu) = \min_{q_\nu^{min} \leq q_\nu \leq q_\nu^{max}} [C_2(q_2) + \phi_\nu(x_\nu - q_\nu)].$$

Соотношение

$$(36) \quad \phi_n(M) = \min_{q_1, q_2, \dots, q_n} \sum_i C_i(q_i^*(M))$$

позволяет определить глобальный минимум целевой функции и соответствующие ему потери в сети, отвечающие уравнениям энергетического баланса

$$(37) \quad \sum_i d_i + \frac{1}{2} \sum_{ij} L_{ij}(g_{ij}) = M.$$

Полученное решение определяет нижнюю достижимую границу стоимости поставки для заданных потерь энергии в сети (37). Пусть на основе полученных выше условий оптимальности рассчитано оптимальное решение и получены значения  $g_{ij}^*$ ,  $q_i^*$  и  $I^*$ . В этом случае соотношения (37) позволяют рассчитать  $M^*$  и затем решить задачу (31), (32), (33) для полученного  $M^*$ .

Если окажется, что решение  $I^* = \phi_n(M^*)$ , то  $g_{ij}^*$  и  $q_i^*$  является глобальным минимумом. Если величина  $|I^* - \phi_n(M^*)|$  является достаточно малой, то можно закончить поиск и рассматривать полученный минимум как удовлетворительное решение.

#### 4. Оптимизация поставок энергии с использованием автоматической системы управления

На практике оператор рынка использует предсказывающее управление, т.е. он предсказывает спрос, рассчитывает соответствующие ему распределения поставок и затем информирует поставщиков об их квотах. В результате в системе возникают значительные помехи, вызванные разницей между текущими и расчетными квотами, которые не только приводят к ошибкам при управлении рынком, но при определенных условиях могут привести к его неустойчивости. На некоторых рынках эта проблема усугубляется тем, что контроль за состоянием рынка производится значительно чаще, чем аукционы.

Так, в Австралии контроль осуществляют каждые 5 минут, а аукционы, на которых определяют цены на очередной расчетный период и платежи за поставки энергии, проводят с интервалом 30 минут. В итоге текущие цены и объемы поставок на рынке определяются с большими погрешностями, что отрицательно сказывается на экономической эффективности управления рынком.

Полученные выше условия оптимальности могут быть использованы для создания непрерывных автоматических систем управления рынком электроэнергии, в которых последовательность периодических аукционов можно заменить одним непрерывным аукционом. Это позволит значительно снизить уровень ошибок при расчете оптимального распределения поставок.

Рассмотрим сеть региональных рынков, как экономическую макросистему [7], состоящую из подсистем (региональных рынков), которые обмениваются ресурсом — энергией  $q_i$ . Система является открытой, т.к. она получает внешние потоки заявок от потребителей и производителей энергии. В каждой подсистеме имеется своя оценка энергии  $P_j$ , которая в свою очередь зависит от объемов обмена между подсистемами  $g_{ij}$ . Чем больше  $g_{ij}$  ( $g_{ij}$  считается положительным, если энергия передается из  $i$ -го в  $j$ -ый региональный рынок), тем меньше эта оценка. Величина объема  $g_{ij}$  зависит от разницы оценок энергии в  $i$ -ом и  $j$ -ом региональных рынках таким образом, что она равна нулю, если  $P_i = P_j$  и

$$(38) \quad \text{sign}[g_{ij}(P_i, P_j)] = \text{sign}[P_i - P_j].$$

Потоки энергии в такой системе направлены в сторону регионов с более высокой энергетической оценкой, что приводит к снижению последних и сближению оценок на всех рынках в установившемся режиме. Когда энергия передается в  $j$ -ый региональный рынок ( $q_{ij} > 0$ ), то количество энергии  $q_j$ , генерируемое на этом рынке, уменьшается и соответственно уменьшается стоимость генерации  $C_j$  и наивысшая ценовая ступенька  $P_j$  на ценовой заявке. Если  $q_{ij} < 0$ , то  $C_i$  и  $P_i$  возрастают. Нулевые потери при передаче энергии соответствуют случаю бесконечно большой «проводимости» (отсутствию потерь и ограничений на объемы поставок) линии. Например, если передача энергии описывается линейным законом

$$(39) \quad g_{ij}(P_i, P_j) = \beta_{ij}(P_i - P_j),$$

то нулевые потери соответствуют  $\beta_{ij} = \infty$ . В этом случае макросистема превращается в гомогенную и в равновесии  $P_i = P_j$ .

Отметим, что (17) можно записать в виде

$$(40) \quad \phi_{ij}(g_{ij}) = \frac{P_i}{P_j}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \quad g_{ij} = -g_{ji}.$$

Таким образом, состояние системы, в которой потоки энергии описываются уравнением (39) и условием  $\beta_{ij} \rightarrow \infty$ ,  $q_i$  определяется соотношением (17) и автономными ограничениями (12), а установившееся значение  $P_i^s$  совпадает с решением задачи оптимизации (7), (8).

Видоизменим кинетические функции  $\tilde{g}_{i,j}(P_i, P_j)$ , так, чтобы для них стационарное состояние системы совпадало с решением задачи (7), (8). Из (40) следует, что задача определения такой кинетической функции сводится к решению следующего функционального уравнения

$$(41) \quad \phi_{ij}(\tilde{g}_{ij}(P_i, P_j)) = \frac{P_i}{P_j}$$

относительно зависимостей  $\tilde{g}_{ij}$ .

Если обозначить

$$L'(g_{ij}) \equiv \frac{dL_{ij}}{dg_{ij}},$$

то уравнение (41) можно записать в следующей форме

$$(42) \quad \frac{1 - (1 - \alpha_{ij})L'}{1 + \alpha_{ij}L'} = \frac{P_i}{P_j}.$$

Получим

$$(43) \quad L'(g_{ij}) = \frac{P_j - P_i}{\bar{P}_{ij}}, \quad \bar{P}_{ij} \equiv \alpha_{ij}P_i + \alpha_{ji}P_j.$$

Функцию потерь часто аппроксимируют линейной или квадратичной функцией. Рассмотрим их в качестве примера.

1. Предположим

$$L_{ij}(g_{ij}) = \beta_{ij}g_{ij}^2,$$

тогда из (43) следует

$$(44) \quad g_{ij}(P_i, P_j) = \frac{1}{2\beta_{ij}\bar{P}_{ij}}(P_j - P_i).$$

2. Предположим

$$(45) \quad L_{ij}(g_{ij}) = \begin{cases} r_{ij}^+g_{ij} + \beta_{ij}^+g_{ij}^2 & \text{если } g_{ij} > 0, \\ L_{ij}(g_{ij}) = 0 & \text{если } g_{ij} = 0, \\ r_{ij}^-g_{ij} + \beta_{ij}^-g_{ij}^2 & \text{если } g_{ij} < 0, \end{cases}$$



здесь  $r_{ij}^+ > 0$  и  $r_{ij}^- < 0$ . Тогда из (43) следует, что (Рис. 5)

$$(46) \quad g_{ij}(P_i, P_j) = \frac{P_j - P_i - r_{ij}^+ \bar{P}_{ij}}{2\beta_{ij} \bar{P}_{ij}} \quad \text{для } P_j - P_i > r_{ij}^+ \bar{P}_{ij},$$

$$(47) \quad g_{ij}(P_i, P_j) = \frac{P_j - P_i - r_{ij}^- \bar{P}_{ij}}{2\beta_{ij} \bar{P}_{ij}} \quad \text{для } P_j - P_i < -|r_{ij}^-| \bar{P}_{ij},$$

$$(48) \quad g_{ij}(P_i, P_j) = 0, \quad \text{для } r_{ij}^+ \bar{P}_{ij} < P_j - P_i < -|r_{ij}^-| \bar{P}_{ij}.$$

Таким образом, если разница в ценах на двух рынках мала, то нецелесообразно передавать энергию между ними.

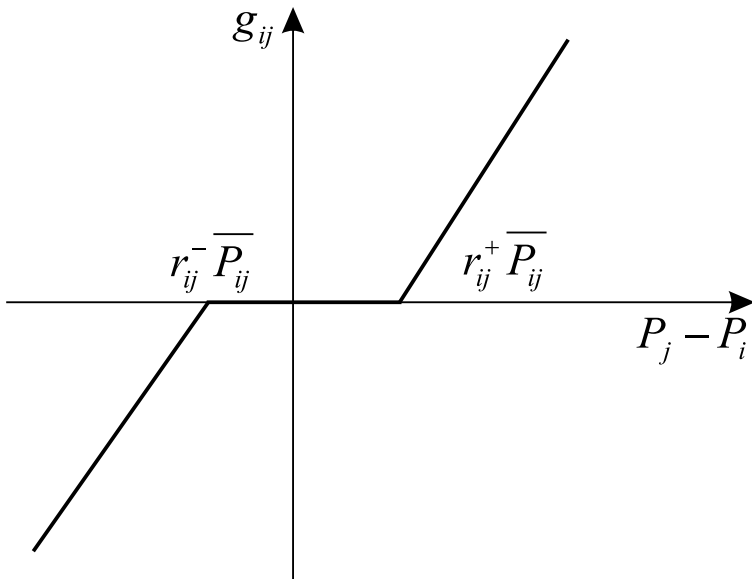


Рис. 5. Характер зависимости оптимального потока  $g_{ij}$  от разности наивысших цен поставки на двух региональных рынках.

Если получена зависимость  $\tilde{g}_{ij}(P_i, P_j)$  или ее аппроксимация для всех  $i, j$ , то решение задачи распределения поставок значительно

упрощается, поскольку она распадается на отдельные задачи управления потоками в реальном времени:

- измерение заявок  $\{d_1(t), d_2(t), \dots, d_n(t)\}$  в реальном времени,
- пересчет региональных цен  $P_i(q_i(t))$ ,
- изменение потоков в соответствии с правилом  $\tilde{g}_{ij}(P_i, P_j)$ .

Такой подход позволяет получить решение задачи распределения поставок в форме оптимального синтеза, реализацией которого является автоматическая система управления с обратной связью.

### Список литературы

- [1] Chong-White C. Investigation into aspects of Australian national electricity market central dispatch algorithm: MS Thesis, UTS, 2001. ↑1
- [2] Gillett R. Pre-dispatch process description: NEMMCO, 1998. ↑1
- [3] Schweppe F. C., Caramanis M. C., Tabors R. D., Bohn R. E. Spot Pricing of Electricity. — Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers, 1988. ↑1
- [4] Chowdhury B. H., Rahman S. A review of recent advances in economic dispatch. — Т. 5, № 4: IEEE Trans. Pow. Syst., 1990. — 1248 с. ↑1
- [5] Guan X., Ni E., Luh P. B., Ho Y. Optimization-based bidding strategies for deregulated electricity power markets in Hobbs, B.F. et al. (eds.): The Next Generation Of Electric Power Unit Commitment Models. — Boston, MA: Kluwer Academic, 2001. ↑
- [6] Беллман Р. Динамическое программирование. — М.: ИЛ, 1960. ↑3
- [7] Цирлин А. М. Математические модели и оптимальные процессы в макросистемах. — М.: Наука, 2003. ↑4

## 5. Приложение

### Вычислительный алгоритм.

Алгоритм начинает работу с определения любого допустимого решения, т.е. потоков  $g_{ij}$ , при которых выполняются все автономные ограничения — на объемы потоков (34) и региональных генераций (12). Затем это решение последовательно улучшается с помощью следующей вычислительной процедуры:

(1) рассчитывают разницу приведенных цен  $\Delta \bar{P}_{ij} = \bar{P}_{ij} - \bar{P}_{ji}$  для каждой пары регионов, связанных между собой;

(2) отмечают все те пары, для которых выполнено одно из условий оптимальности ;

(3) для каждой не отмеченной пары, если  $\bar{P}_{ij}^- > \bar{P}_{ji}^+$  то  $g_{ij}^{min} < g_{ij} < g_{ij}^{max}$ ,  $q_i^{max} < q_i(g_{ij}) < q_i^{max}$ ,  $q_j^{max} < q_j(g_{ij}) < q_j^{max}$ , то  $g_{ij}$  увеличивается до тех пор, пока одно из этих неравенств не обращается в равенство. При таком увеличении происходит переход через ступени

ценовой заявки, в результате которого гарантируется, что приведенная  $i$ -я цена остается меньше, чем приведенная цена  $\bar{P}_{ji}$ . Аналогично, если  $\bar{P}_{ij}^- < \bar{P}_{ji}^+$ , то  $g_{ij}$  уменьшают до тех пор, пока приведенные цены не сравняются, либо одно из автономных ограничений не выйдет на границу допустимых значений. Улучшенное таким образом решение рассматривают как исходное для следующего шага (2).

После завершения итераций решение, полученное для всех фрагментов сети, состоящих из двух рынков, используют как исходное для аналогичной процедуры применительно к фрагментам сети, состоящим из трех связанных локальных рынков и т.д.

Центральной частью алгоритма является нахождение первого приближения, т.е. набора объемов передаваемой энергии между региональными рынками, при котором удовлетворяются автономные ограничения на региональные генерации. Когда допустимое начальное приближение получено, алгоритм гарантирует определение глобального минимума благодаря монотонной зависимости цен от объемов поставки в ценовых заявках.

Отметим, что не обязательно увеличивать/уменьшать  $g_{ij}$  монотонно на стадии (2) алгоритма. Поскольку фактически это дискретный поиск минимума монотонной функции (на каждой ценовой ступени минимум может быть лишь в трех точках – на концах и в любой промежуточной), экстремум может быть найден с помощью любого метода одномерного поиска.

#### ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА ИПС РАН

A. A. Akhremenkov, V. A. Kazakov, A. M. Tsirlin. *Optimization algorithm for energy markets as macrosystems* // Proceedings of Program Systems institute scientific conference “Program systems: Theory and applications”. — Pereslavl-Zalesskij, v. 1, 2009. — p. 85–103. — ISBN 978-5-901795-16-3 (*in Russian*).

АБСТРАКТ. Рассмотрена задача оптимизации торговли на взаимосвязанных энергетических рынках с учетом особенностей рынка. Получены оптимальные условия задачи и алгоритм ее решения. Возможность построения системы с автоматической оптимизацией показана.