ISBN 978-5-901795-16-3 ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ. Переславль-Залесский, 2009

УДК 517.957

В. А. Юмагужин, В. Н. Юмагужина

# Скалярные дифференциальные инварианты уравнений $y'' = a^3(x,y)y'^{\,3} + a^2(x,y)y'^{\,2} + a^1(x,y)y' + a^0(x,y)$

Аннотация. Статья посвящена дифференциальным инвариантам обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$y'' = a^3(x,y)y'^{\,3} + a^2(x,y)y'^{\,2} + a^1(x,y)y' + a^0(x,y)$$

относительно точечных преобразований. Исследуется действие псевдогруппы всех таких преобразований на естественном расслоении этих уравнений. На этом пути строятся тензорные и скалярные дифференциальные инварианты рассматриваемых уравнений. Получена полная система образующих и дифференциальных соотношений между ними для алгебры всех скалярных дифференциальных инвариантов широкого класса рассматриваемых уравнений, в частности, для уравнения общего положения.

## 1. Введение

Эта статья посвящена дифференциальным инвариантам обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$y'' = a^3(x,y)y'^{\,3} + a^2(x,y)y'^{\,2} + a^1(x,y)y' + a^0(x,y)\,. \tag{1.1}$$

Существуют различные подходы к построению дифференциальных инвариантов этих уравнений, см., например, R. Liouville [1], S. Lie [2, 3], A. Tresse [4, 5], E. Cartan [6], G. Thomsen [7], and R. B. Gardner [8].

В работах [9, 10] мы представили подход к этой задаче, отличный от известных ранее. Этот подход является результатом нашей попытки перенести конструкцию структурной функции $G$-структуры, см. [11, 12], в расслоения джетов сечений естественного расслоения соответствующих геометрических объектов. Другой общий подход к конструированию дифференциальных инвариантов имеется в работах В. Лычагина и Б. Кругликова [13], [14].

Мы рассматриваем каждое уравнение $\mathcal{E}$ вида (1.1) как геометрическую структуру. С этой целью уравнение $\mathcal{E}$ отождествляется с сечением

$$S_{\mathcal{E}} : (x,y) \mapsto (\, x, y,\, a^0(x,y),\, a^1(x,y),\, a^2(x,y),\, a^3(x,y)\,)$$

тривиального расслоения

$$\pi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

где $\mathbb{R}^n$ – $n$-мерное арифметическое пространство. Это отождествление является биекцией множества всех рассматриваемых уравнений на множество всех сечений расслоения $\pi$. Хорошо известно, см. [15], что всякое точечное преобразование переменных $x$ и $y$ преобразует каждое уравнение (1.1) в уравнение того же вида [1]. Отсюда, в силу нашего отождествления, всякое точечное преобразование порождает преобразование сечений расслоения $\pi$. Иными словами, всякое точечное преобразование $f$ базы расслоения $\pi$ естественным образом поднимается до диффеоморфизма $f^{(0)}$ тотального пространства расслоения $\pi$. Таким образом, расслоение $\pi$ уравнений (1.1) является естественным, и уравнение (1.1), рассматриваемое как сечение $\pi$, является геометрической структурой, см. [16]. Диффеоморфизм $f^{(0)}$ естественно поднимается до диффеоморфизма $f^{(k)}$ расслоения $J^k\pi$ $k$-джетов сечений расслоения $\pi$, $k = 0, 1, ..., \infty$. Т.е. точечные преобразования естественным образом действуют на всех расслоениях $J^k\pi$. В результате эти расслоения разбиваются на орбиты:

(1) Расслоения $J^0\pi$ и $J^1\pi$ являются орбитами.
(2) $J^2\pi$ является объединением двух орбит, одна из которых является орбитой общего положения, вторая – вырожденная орбита.
(3) $J^3\pi$ является объединением четырех орбит, одна из которых – орбита общего положения, остальные – вырожденные орбиты.
(4) $J^k\pi$, $k \geq 4$, является объединением непрерывного семейства вырожденных орбит.

Мы доказываем, что всякий $k$-джет $\theta_k \in J^k\pi$, $k \geq 1$, естественным образом порождает некоторый геометрический объект $\omega_{\theta_k}$ на касательном пространстве к базе расслоения $\pi$ в точке $p = \pi_k(\theta_k)$. В результате, мы получаем поле этих объектов на $J^k\pi$

$$\theta_k \longmapsto \omega_{\theta_k}\,.$$

[1]Обыкновенные уравнения 2-го порядка допускают контактные преобразования. Известно, см. [17], что любые два таких уравнения контактно эквивалентны.

Эти поля являются инвариантами действия псевдогруппы всех точечных преобразований базы на $J^k\pi$. Их ограничения на сечение расслоения $J^k\pi$, порожденное сечением $S_{\mathcal{E}}$, являются дифференциальными инвариантами порядка $k$ уравнения $\mathcal{E}$.

В этой статье мы строим тензорные дифференциальные инварианты, различающие орбиты в расслоениях $J^2\pi$ и $J^3\pi$. Это описание орбит с помощью тензорных инвариантов является новым результатом, хотя большинство из полученных инвариантов, по существу, известны специалистам. Основным новым результатом нашей статьи является описание алгебры $A$ всех скалярных дифференциальных инвариантов, определенных в прообразе $(\pi_{\infty,3})^{-1}(\mathrm{Orb}_0^3)$, где $\mathrm{Orb}_0^3$ – орбита общего положения в $J^3\pi$, а отображение $\pi_{\infty,3} : J^\infty\pi \to J^3\pi$ – естественная проекция, сопоставляющая $\infty$-джету его 3-джет. Мы находим полный набор образующих алгебры $A$ и полный набор дифференциальных соотношений между этими образующими.

В этой статье все вычисления выполнены с помощью REDUCE - программы [18].

Все многообразия и отображения в статье предполагаются гладкими. Через $j_p^k f$ , $k = 0, 1, 2, \ldots$, обозначается $k$-джет отображения $f$ в точке $p$, через $\mathbb{R}$ обозначается поле действительных чисел и через $\mathbb{R}^n$ — $n$-мерное арифметическое пространство. Предполагается суммирование по повторяющимся индексам во всех формулах.

## 2. Расслоение уравнений

Пусть

$$\pi : E = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

— тривиальное расслоение. Через $x^1, x^2$ обозначим стандартные координаты на базе этого расслоения, а через $u^1, u^2, u^3, u^4$ — обозначим стандартные координаты на его слое. Пусть $\mathcal{E}$ — произвольное уравнение (1.1). Мы отождествляем его с сечением $S_{\mathcal{E}}$ расслоения $\pi$, определенным формулой

$$S_{\mathcal{E}}(p) = \big(\, p,\, a^0(p),\, a^1(p),\, a^2(p),\, a^3(p)\,\big),$$

где $p = (x^1, x^2)$. Ясно, что это отождествление является биекцией между множеством всех уравнений (1.1) и множеством всех сечений расслоения $\pi$. Напомним, что *точечное преобразование* пространства $\mathbb{R}^2$ есть диффеоморфизм $f$ открытой области из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = (\tilde{x}, \tilde{y}). \tag{2.1}$$

Оно преобразует уравнение $\mathcal{E}$ вида (1.1) в уравнение $\tilde{\mathcal{E}}$ того же вида, см. [15]. Коэффициенты $\tilde a$, $\tilde b$, $\tilde c$, $\tilde d$ уравнения $\tilde{\mathcal{E}}$ выражаются через коэффициенты уравнения $\mathcal{E}$ и 2–джет обратного преобразования $f^{-1}$:

$$\tilde a^i(\tilde p) = \Phi^i\big( a^0(f^{-1}(\tilde p)), \ldots, a^3(f^{-1}(\tilde p)),\, j^2_{\tilde p} f^{-1}\big), \quad i = 0, 1, 2, 3. \tag{2.2}$$

Следовательно уравнения

$$\tilde p = f(p), \quad \tilde u^i = \Phi^i\big( u^1, \ldots, u^4,\, j^2_{f(p)} f^{-1}\big), \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

определяют диффеоморфизм $f^{(0)}$ расслоения $\pi$. Он называется *поднятием преобразования $f$ в расслоение* $\pi$. Т.о. ясно, что расслоение $\pi$ является естественным.

Закон преобразования уравнений (1.1) в терминах соответствующих сечений имеет следующий вид

$$S_{\tilde{\mathcal{E}}} = f^{(0)} \circ S_{\mathcal{E}} \circ f^{-1}.$$

Через $j^k_p S$ обозначим $k$–джет сечения $S$ расслоения $\pi$ в точке $p$, $k = 0, 1, 2, \ldots, \infty$, через

$$\pi_k : J^k\pi \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \pi_k : j^k_p S \mapsto p$$

обозначим расслоение всех таких $k$–джетов. Всякое точечное преобразование $f$ формулой

$$f^{(k)}(\, j^k_p S\,) = j^k_{f(p)}\big( f^{(0)} \circ S \circ f^{-1}\big) \tag{2.3}$$

определяет диффеоморфизм $f^{(k)}$ расслоения $J^k\pi$. Он называется *поднятием преобразования $f$ в расслоение джетов $J^k\pi$.*

Через $\Gamma$ обозначим псевдогруппу всех точечных преобразований базы расслоения $\pi$. Эта псевдогруппа действует на каждом расслоении $J^k\pi$ посредством поднятых преобразований.

Стандартные координаты в $J^k\pi$ обозначим через $x^1$, $x^2$, $u^i_\sigma$, где $i = 1, \ldots, 4$, $\sigma$ — мультииндекс $\{j_1 \ldots j_r\}$, $j_1, \ldots, j_r = 1, 2$, $|\sigma| = r$, $0 \le |\sigma| \le k$. Через $\sigma j$ обозначим мультииндекс $\{j_1 \ldots j_r j\}$. Естественная проекция

$$\pi_{k,\,r} : J^k\pi \longrightarrow J^r\pi\,, \quad \infty \ge k > r,$$

определяется формулой $\pi_{k,\,r}(\, j^k_p S\,) = j^r_p S$. Через $J^k_p\pi$ обозначим слой расслоения $\pi_k$ над точкой $p$.

## 3. Алгебры изотропии и орбиты

Пусть $X$ — векторное поле на базе расслоения $\pi$ и $f_t$ — поток этого поля. Тогда поток $f_t^{(k)}$ на расслоении $J^k\pi$ определяет векторное поле $X^{(k)}$ in $J^k\pi$, которое нзывается *подъемом поля $X$ в расслоение $J^k\pi$*. Очевидно

$$(\pi_{l,\,m})_*\big(\,X^{(l)}\,\big) = X^{(m)}\,,\quad \infty \geq l > m \geq -1\,.$$

Через $X^{(k)}_{\theta_k}$ обозначим значение поля $X^{(k)}$ в точке $\theta_k$. Ясно, что вектор $X^{(k)}_{\theta_k}$ определяется $k+2$-джетом $j_p^{k+2}X$, где $p = \pi_k(\theta_k)$.

Алгебра изотропии $\mathfrak{g}_{\theta_k}$ точки $\theta_k$ определяется формулой

$$\mathfrak{g}_{\theta_k} = \big\{\, j_p^{2+k}X \,\big|\, X^{(k)}_{\theta_k} = 0\,\big\}.$$

Структура алгебры Ли на $\mathfrak{g}_{\theta_k}$ порождается операцией коммутирования векторных полей, обращающихся в ноль в точке $p$.

$$[\,j_p^{2+k}X,\, j_p^{2+k}Y\,] = j_p^{2+k}[\,X,\, Y\,]\,.$$

Имеет место следующее утверждение:

Теорема 3.1.

(1) *При $k = 0, 1$ $\dim \mathfrak{g}_{\theta_k} = 6$ для всех $\theta_k \in J^k\pi$.*
(2) *Размерность алгебры изотропии точки $\theta_2 \in J^2\pi$ равна либо 4, либо 6.*
(3) *Размерность алгебры изотропии точки $\theta_3 \in J^3\pi$ равна: либо 0, либо 1, либо 2, либо 6.*

Из этой теоремы вытекает

Теорема 3.2.

(1) *$J^k\pi$, $k = 0, 1$, является орбитой действия $\Gamma$,*
(2) *$J^2\pi$ – объединение двух орбит: орбиты общего положения $\mathrm{Orb}_0^2$ и вырожденной орбиты $\mathrm{Orb}_2^2$.*

$$\mathrm{Orb}_0^2 = \{\theta_2 \in J^2\pi |\, \dim \mathfrak{g}_{\theta_2} = 4\},\quad \mathrm{Orb}_2^2 = \{\theta_2 \in J^2\pi |\, \dim \mathfrak{g}_{\theta_2} = 6\}.$$

(3) *$J^3\pi$ – объединение 4-х орбит: орбиты общего положения $\mathrm{Orb}_0^3$ и вырожденных орбит $\mathrm{Orb}_1^3$, $\mathrm{Orb}_2^3$ и $\mathrm{Orb}_6^3$.*

$$\mathrm{Orb}_r^3 = \{\,\theta_3 \in J^2\pi \,|\, \dim \mathfrak{g}_{\theta_3} = r\,\},\quad r = 0, 1, 2, 6.$$

Ниже нам понадобятся следующие идеалы алгебр $\mathfrak{g}_{\theta_2}$ и $\mathfrak{g}_{\theta_3}$:

$$g_{\theta_1} = \left\{ j_p^3 X \in \mathfrak{g}_{\theta_1} \,\middle|\, j_p^1 X = 0 \right\}, \quad g_{\theta_2} = \left\{ j_p^4 X \in \mathfrak{g}_{\theta_2} \,\middle|\, j_p^1 X = 0 \right\}.$$

Прямым вычислением можно показать, что каждый из этих идеалов естественным образом отождествляется с подпространством

$$g = \langle e_1, e_2 \rangle \subset T_p \otimes (T_p^* \odot T_p^*)\,,$$

где

$$\begin{aligned} e_1 &= 2\frac{\partial}{\partial x^1} \otimes (dx^1 \odot dx^1) + \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes (dx^1 \odot dx^2)\,, \\ e_2 &= 2\frac{\partial}{\partial x^2} \otimes (dx^2 \odot dx^2) + \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes (dx^1 \odot dx^2)\,, \end{aligned} \tag{3.1}$$

$T_p$ и $T_p^*$ – касательное и кокасательное пространство к базе расслоения $\pi$ в точке $p$.

## 4. Пространства формальных симметрий

Каждое сечение $S$ расслоения $\pi$ порождает сечение $j_k S$ расслоения $\pi_k$

$$j_k S : p \;\mapsto\; j_p^k S.$$

Пусть $\theta_{k+1} \in J^{k+1}\pi$ и $j_p^{k+1} S = \theta_{k+1}$. Тогда $\theta_{k+1}$ отождествляется с касательным пространством к образу сечения $j_k S$ в точке $\theta_k = j_p^k S$. Мы обозначим это пространство через $\mathcal{K}_{\theta_{k+1}}$. Рассмотрим векторные поля $X$ на базе расслоения $\pi$, проходящие через точку $p$. Следующее векторное пространство $k+2$-джетов этих полей в точке $p$ играет важную роль в нашем подходе к построению дифференциальных инвариантов.

$$\mathcal{A}_{\theta_{k+1}} = \{\, j_p^{2+k} X \mid X^{(k)}_{\theta_k} \in \mathcal{K}_{\theta_{k+1}} \,\}\,. \tag{4.1}$$

Несложно доказать, что скобка векторных полей порождает билинейное кососимметричное отображение

$$[\ ,\ ] : \mathcal{A}_{\theta_{k+1}} \times \mathcal{A}_{\theta_{k+1}} \to \mathcal{A}_{\theta_k}, \quad [\, j_p^{k+2}\xi_1,\, j_p^{k+2}\xi_2\,] \mapsto j_p^{k+1}[\xi_1,\, \xi_2].$$

Рассмотрим алгебру изотропии $\mathfrak{g}_{\theta_k}$ точки $\theta_k = \pi_{k+1,k}(\theta_{k+1})$. Ясно, что

$$\mathfrak{g}_{\theta_k} \subset \mathcal{A}_{\theta_{k+1}} \quad \forall\, \theta_{k+1} \in \pi^{-1}_{k+1,k}(\theta_k) \;\; \forall\, \theta_k \in J^k\pi\,. \tag{4.2}$$

Обозначим через $\rho_{m,n}$, $m > n \geq 0$, естественную проекцию, ставящую в соответствие $m$-джету веторного поля $X$ его $n$-джет

$$\rho_{m,n} : j_p^m X \mapsto j_p^n X, \quad m > n \geq 0\,.$$

Легко видеть, что проекция

$$\rho_{k+2,0}\big|_{\mathcal{A}_{\theta_{k+1}}} : \mathcal{A}_{\theta_{k+1}} \to T_p, \quad p = \pi_{k+1}(\theta_{k+1})\,,$$

является сюрьекцией.

Подпространство $H \subset \mathcal{A}_{\theta_{k+1}}$ называется *горизонтальным* если $\rho_{k+2,0}$ проектирует $H$ на $T_p$ изоморфно. Легко видеть, что если $H$ – горизонтальное подпространство в $\mathcal{A}_{\theta_{k+1}}$, то

$$\mathcal{A}_{\theta_{k+1}} = H \oplus \mathfrak{g}_{\theta_k}\ .$$

Любые два горизонтальных подпространства $H, \tilde{H} \subset \mathcal{A}_{\theta_{k+1}}$ определяют линейное отображение

$$f_{H,\tilde{H}} : T_p \to \mathfrak{g}_{\theta_k}\,, \quad f_{H,\tilde{H}} : X \mapsto (\rho_{k+2}|_H)^{-1}(X) - (\rho_{k+2}|_{\tilde{H}})^{-1}(X)\,.$$

Пусть $H \subset \mathcal{A}_{\theta_{k+1}}$ – горизонтальное подпространство и пусть $f : T_p \to \mathfrak{g}_{\theta_k}$ – линейное отображение. Тогда существует единственное горизонтальное подпространство $\tilde{H} \subset \mathcal{A}_{\theta_{k+1}}$ такое, что $f = f_{H,\tilde{H}}$. Это подпространство натянуто на джеты $(\rho_{k+2}|_H)^{-1}(X) - f(X)\,,\ X \in T_p$.

## 5. Тензорные дифференциальные инварианты

### 5.1. Инварианты на $J^2\pi$

#### 5.1.1. *Препятствие к линеаризуемости*

Пусть $\theta_2$ – произвольная точка в $J^2\pi$, $\theta_0 = \pi_{2,0}(\theta_2)$ и $p = \pi_2(\theta_2)$.

Предложение 5.1. *Существуют горизонтальные подпространства $H \subset \mathcal{A}_{\theta_2}$ удовлетворяющие условию*

$$\rho_{2,1}(\,[\,j^3_pX\,,\,j^3_pY\,]\,) = 0 \quad \forall\, j^3_pX, j^3_pY \in H\,. \tag{5.1}$$

Пусть $H \subset \mathcal{A}_{\theta_2}$ – горизонтальное подпространство, удовлетворяющее (5.1). Тогда, принимая во внимание изоморфизм $\rho_{3,0} : H \to T_p$, $\rho_{3,0} : j^3_pX \mapsto X_p$, мы можем определить 2–форму на $T_p$

$$\omega_H(X_p, Y_p) = \big[\,j^3_pX,\, j^3_pY\,\big] \quad \forall\, X_p, Y_p \in T_p\,.$$

Теорема 5.2. *Форма $\omega_H$ не зависит от выбора горизонтального подпространства $H$, удовлетворяющего* (5.1).

Таким образом, определен тензорный дифференциальный инвариант на $J^2\pi$

$$\omega^2 : \theta_2 \mapsto \omega_H .$$

В стандартных координатах он выглядит следующим образом

$$\omega^2 = (\, L_1 \cdot e_1 + L_2 \cdot e_2 \,) \otimes (dx^1 \wedge dx^2)\,, \tag{5.2}$$

где

$$\begin{aligned} L_1 &= 3u^1_{22} - 2u^2_{12} + u^3_{11} \\ &\qquad + 3u^4 u^1_1 - 3u^3 u^1_2 + 2u^2 u^2_2 - u^2 u^3_1 - 3u^1 u^3_2 + 6u^1 u^4_1\,, \\ L_2 &= u^2_{22} - 2u^3_{12} + 3u^4_{11} \\ &\qquad - 3u^1 u^4_2 + 3u^2 u^4_1 - 2u^3 u^3_1 + u^3 u^2_2 + 3u^4 u^2_1 - 6u^4 u^1_2\,, \end{aligned}$$

и $e_1$, $e_2$ определяются формулами (3.1).

Обозначим через $\omega^2_{\mathcal{E}}$ ограничение $\omega^2$ на образ сечения $j_2 S_{\mathcal{E}} : p \mapsto j^2_p S_{\mathcal{E}}$. Т.о. $\omega^2_{\mathcal{E}}$ – дифференциальный инвариант уравнения $\mathcal{E}$.

Предложение 5.3. *Уравнение $\mathcal{E}$ вида* (1.1) *приводится к линейному виду точечным преобразованием тогда и только тогда, когда $\omega^2_{\mathcal{E}} = 0$.*

Инвариант $\omega^2$ различает орбиты расслоения $J^2\pi$.

Теорема 5.4.

(1) $\theta_2 \in \mathrm{Orb}^2_0$ *тогда и только тогда, когда* $\omega^2(\theta_2) \neq 0$.
(2) $\theta_2 \in \mathrm{Orb}^2_2$ *тогда и только тогда, когда* $\omega^2(\theta_2) = 0$.

### 5.1.2. *Следующие инварианты*

Применяя к $\omega^2$ операцию свертки тензора по верхнему и нижнему индексу, получим тензорный дифференциальный инвариант

$$\alpha^2 = (L_1 dx^1 + L_2 dx^2) \otimes (dx^1 \wedge\ dx^2). \tag{5.3}$$

Т.к. $\dim T_p = 2$, то свертка

$$T_p \otimes (\wedge^2 T^*_p) \otimes (\wedge^2 T^*_p) \longrightarrow T^*_p \otimes (\wedge^2 T^*_p)\,, \quad (t^i_{r_1 s_1, r_2 s_2}) \mapsto (t^m_{m s_1, r_2 s_2})$$

является изоморфизмом. Следовательно прообраз тензора $(1/2)\alpha^2$ при этом изоморфизме приводит к тензорному дифференциальному инварианту

$$\beta^2 : \theta_2 \longmapsto \beta^2_{\theta_2} = (L_2(\theta_2)\frac{\partial}{\partial x^1} - L_1(\theta_2)\frac{\partial}{\partial x^2}) \otimes (dx^1 \wedge\ dx^2)^2\,. \tag{5.4}$$

## 5.2. Инварианты на $J^3\pi$

### 5.2.1. *Первый нетривиальный инвариант*

В этом параграфе мы построим дифференциальные инварианты на $(\pi_{3,2})^{-1}(\mathrm{Orb}_0^2) \subset J^3\pi$.

Пусть $\theta_3 \in (\pi_{3,2})^{-1}(\mathrm{Orb}_0^2) \subset J^3\pi$ и let $p = \pi_3(\theta_3)$.

Предложение 5.5. *Существуют такие горизонтальные подпространства $H \subset \mathcal{A}_{\theta_3}$, что*

$$\rho_{3,1}\big(\,[\,j_p^4 X,\, j_p^4 Y\,]\,\big) = 0 \quad \forall\, j_p^4 X, j_p^4 Y \in H. \tag{5.5}$$

Пусть $H$ – горизонтальное подпространство в $\mathcal{A}_{\theta_3}$, удовлетворяющее (5.5). Рассмотрим произвольные векторы $j_p^4 X$, $j_p^4 Y$, $j_p^4 U$ и $j_p^4 Z$ в $H$. Тогда $\Big[j_p^2 U, \big[j_p^3 Z, [j_p^4 X, j_p^4 Y]\big]\Big] = j_p^1 V$. Существует такой единственный вектор $j_p^4 W \in H$, что $W_p = V_p$. Тогда $j_p^1 V - j_p^1 W \in T_p \otimes T_p^*$. Можно доказать, что формула

$$t_H(X_p, Y_p, Z_p, U_p) = j_p^1 V - j_p^1 W \quad \forall\, U_p, Z_p, X_p, Y_p \in T_p$$

определяет тензор $t_H$, принадлежащий пространству $T_p \otimes (T_p^* \odot T_p^* \odot T_p^*) \otimes (T_p^* \wedge T_p^*)$. Существует естественная проекция

$$\mu : T_p \otimes (T_p^* \odot T_p^*) \to g \subset T_p \otimes (T_p^* \odot T_p^*)\,, \quad (X^i_{jk}) \mapsto \Big(\frac{1}{3}(\delta^i_j\, X^r_{kr} + \delta^i_k\, X^r_{jr})\Big)\,,$$

где $\delta^i_j$ – символ Кронекера. Эта проекция порождает естественную проекцию

$$\tilde{\mu} : T_p \otimes (T_p^* \odot T_p^*) \otimes T_p^* \otimes (T_p^* \wedge T_p^*) \to g \otimes T_p^* \otimes (T_p^* \wedge T_p^*).$$

Принимая во внимание, что

$$T_p \otimes (T_p^* \odot T_p^* \odot T_p^*) \otimes (T_p^* \wedge T_p^*) \subset T_p \otimes (T_p^* \odot T_p^*) \otimes T_p^* \otimes (T_p^* \wedge T_p^*),$$

мы можем рассмотреть тензор $\tilde{\mu}(t_H) \in g \otimes T_p^* \otimes (T_p^* \wedge T_p^*)$ как 1-форму со значениями в $g \otimes (T_p^* \wedge T_p^*)$. Тогда свертка

$$\big(T_p \otimes (T_p^* \wedge T_p^*)^2\big) \lrcorner \Big(\big(g \otimes (T_p^* \wedge T_p^*)\big) \otimes T_p^*\Big) \subset g \otimes (T_p^* \wedge T_p^*)^3\,,$$

$$(t^i_{r_1 s_1 r_2 s_2}) \lrcorner (p^i_{jk, r_3 s_3, l}) = (t^m_{r_1 s_1 r_2 s_2} p^i_{jk, r_3 s_3, m})\,,$$

определяет новый тензор

$$\omega_H^3 = \beta_{\theta_2}^2 \lrcorner\, \tilde{\mu}(t_H) \in g \otimes (T_p^* \wedge T_p^*)^3.$$

Теорема 5.6. *Тензор $\omega_H^3$ не зависит от выбора горизонтального подпространства $H \subset \mathcal{A}_{\theta_3}$, удовлетворяющего* (5.5).

Положим

$$\omega^3_{\theta_3} = \omega^3_H.$$

Следовательно $\theta_3$ порождает естественным образом тензор $\omega^3_{\theta_3} \in g \otimes (\wedge^2 T^*_p)^3$

$$\omega^3_{\theta_3} = \big(\Psi^1(\theta_3) e_1 + \Psi^2(\theta_3) e_2\big) \otimes (dx^1 \wedge dx^2)^3 ,$$

где

$$\begin{aligned}\Psi^1(\theta_3) &= -(L_1)^2 u^2 + 2L_1L_2u^1 - 3(L_2)^2u^0 \\ &\quad - L_1D_2(L_1) + 4L_1D_1(L_2) - 3L_2D_1(L_1), \\ \Psi^2(\theta_3) &= -3(L_1)^2u^3 + 2L_1L_2u^2 - (L_2)^2u^1 \\ &\quad + 3L_1D_2(L_2) - 4L_2D_2(L_1) + L_2D_1(L_2).\end{aligned}$$

Т.о.

$$\omega^3 : \theta_3 \mapsto \omega^3_{\theta_3}$$

является дифференциальным инвариантом на $(\pi_{3,2})^{-1}(\mathrm{Orb}^2_0) \subset J^3\pi$.

5.2.2. *Следующие инварианты*

Применяя к $\omega^3$ операцию свертки тензора по верхнему и нижнему индексу, получим тензорный дифференциальный инвариант

$$\alpha^3 : \theta_3 \longmapsto \alpha^3_{\theta_3} = (\Psi^1(\theta_3)dx^1 + \Psi^2(\theta_3)dx^2) \otimes (dx^1 \wedge dx^2)^3. \tag{5.6}$$

Свертка тензоров $\beta^2$ и $\alpha^3$ приводит к тензорному дифференциальному инварианту

$$\nu : \theta_3 \longmapsto \frac{1}{3}(\beta^2_{\theta_2} \lrcorner\, \alpha^3_{\theta_3}) = L_3(\theta_3)(dx^1 \wedge dx^2)^5, \tag{5.7}$$

где

$$\begin{aligned}L_3(\theta_3) = L_2(L_1D_1(L_2) - L_2D_1(L_1)) - L_1(L_1D_2(L_2) - L_2D_2(L_1)) \\ + (L_1)^3u^3 - (L_1)^2L_2u^2 + L_1(L_2)^2u^1 - (L_2)^3u^0.\end{aligned}$$

Операция свертки между $\beta^2$ и $\omega^3$ приводит к тензорному дифференциальному инварианту

$$\gamma : \theta_3 \longmapsto \big(\gamma^i_j(\theta_3)\partial_{x^i} \otimes dx^j\big) \otimes (dx^1 \wedge dx^2)^5,$$

где коэффициенты $\gamma^i_j$, $i,j=1,2$, определены формулами

$$\begin{aligned}\gamma^1_2 = L_2(3L_1D_2L_2 - 4L_2D_2L_1 + L_2D_1L_2\\ - 3(L_1)^2u^4 + 2L_1L_2u^3 - (L_2)^2u^2),\\ \gamma^2_1 = L_1(3L_2D_1L_1 - 4L_1D_1L_2 + L_1D_2L_1\\ + (L_1)^2u^3 - 2L_1L_2u^2 + 3(L_2)^2u^1),\end{aligned}$$

$$(L_1)^2\gamma^1_2 + (L_2)^2\gamma^2_1 + 3L_1L_2L_3 = 0,$$

$$L_2\gamma^1_1 + L_1\gamma^1_2 - 6L_2L_3 = 0, \quad L_2\gamma^2_2 + L_1\gamma^1_2 - 6L_2L_3 = 0.$$

Инварианты $\omega^2$, $\nu$ и $\gamma$ определяют орбиты расслоения $J^3\pi$ полностью.

Теорема 5.7.

(1) $\theta_3 \in \mathrm{Orb}^0_3$ *тогда и только тогда, когда* $\omega^2(\pi_{3,2}(\theta_3)) \neq 0$ *и* $\nu(\theta_3) \neq 0$.

(2) $\theta_3 \in \mathrm{Orb}^1_3$ *тогда и только тогда, когда* $\omega^2(\pi_{3,2}(\theta_3)) \neq 0$, $\nu(\theta_3) = 0$ *и* $\gamma(\theta_3) \neq 0$.

(3) $\theta_3 \in \mathrm{Orb}^2_3$ *тогда и только тогда, когда* $\omega^2(\pi_{3,2}(\theta_3)) \neq 0$, $\nu(\theta_3) = 0$ *и* $\gamma(\theta_3) = 0$.

(4) $\theta_3 \in \mathrm{Orb}^6_3$ *тогда и только тогда, когда* $\omega^2(\pi_{3,2}(\theta_3)) = 0$.

Следующие инварианты понадобятся нам при исследовании алгебры скалярных дифференциальных инвариантов.

Точно так, как был получен $\beta^2$ из $\alpha^2$, мы получаем из $\alpha^3$ тензорный дифференциальный инвариант

$$\beta^3 : \theta_3 \longmapsto \beta^3_{\theta_3} = (\Psi^2(\theta_3)\frac{\partial}{\partial x^1} - \Psi^1(\theta_3)\frac{\partial}{\partial x^2}) \otimes (dx^1 \wedge dx^2)^4 .$$

Для всякой точки $\theta_3 \in \mathrm{Orb}^3_0$ тензоры $\nu_{\theta_3}$, $\beta^2_{\theta_2}$ и $\beta^3_{\theta_3}$, где $\theta_2 = \pi_{3,2}(\theta_3)$, порождают естественным образом векторы $\xi_{1_{\theta_3}}$ and $\xi_{2_{\theta_3}}$:
(5.8)

$$\xi_{1_{\theta_3}} = \frac{1}{(L_3)^{2/5}}(L_2\frac{\partial}{\partial x^1} - L_1\frac{\partial}{\partial x^2}), \quad \xi_{2_{\theta_3}} = \frac{1}{(L_3)^{4/5}}(\Psi^2\frac{\partial}{\partial x^1} - \Psi^1\frac{\partial}{\partial x^2}).$$

Поля на $\mathrm{Orb}^3_0$

$$\xi^3_1 : \theta_3 \longmapsto \xi_{1_{\theta_3}} , \quad \xi^3_2 : \theta_3 \longmapsto \xi_{2_{\theta_3}} , \quad \forall\, \theta_3 \in \mathrm{Orb}^3_0$$

являются дифференциальными инвариантами.

Предложение 5.8. *Вектора* $\xi_{1_{\theta_3}}$, $\xi_{2_{\theta_3}}$ *из* $T_p$, $p = \pi_3(\theta_3)$, *являются линейно-независимыми во всякой точки* $\theta_3 \in \mathrm{Orb}^3_0$.

Теперь можно определить векторные поля $\xi_1$ and $\xi_2$ на подрасслоении $(\pi_{\infty,3})^{-1}(\mathrm{Orb}_0^3)$.

$$\xi_1 = \frac{1}{(L_3)^{2/5}}(L_2 D_1 - L_1 D_2), \quad \xi_2 = \frac{1}{(L_3)^{4/5}}(\Psi^2 D_1 - \Psi^1 D_2), \tag{5.9}$$

где $D_1$ и $D_2$ – операторы полных производных по переменным $x^1$ и $x^2$ соответственно.

Ясно, что эти поля являются дифференциальными инвариантами.

## 6. Скалярные дифференциальные инварианты

Впервые скалярные дифференциальные инварианты появляются в расслоении $J^4\pi$.

Через $A_k$ мы обозначим алгебру всех скалярных дифференциальных инвариантов порядка $k$, определенных в $(\pi_{k,3})^{-1}(\mathrm{Orb}_0^3)$, $k > 3$.

Всякая функция от инвариантов из $A_k$ является инвариантом из $A_k$. Следовательно максимальный набор $\{I^1, \dots, I^{N_k}\}$ функционально независимых инвариантов из $A_k$ порождает $A_k$, т.е. всякий инвариант $I \in A_k$ является некоторой функцией инвариантов $I^1, \dots, I^{N_k}$. Подсчет размерностей орбит приводит к следующему утверждению

Предложение 6.1.

(1) *Алгебра $A_k$, $0 \le k \le 3$, тривиальна, т.е. она состоит только из констант.*

(2) *Алгебра $A_k$, $k \ge 4$, порождена $k^2 - k - 6$ функционально независимыми инвариантами. В частности, $A_4$ порождена 6-ю независимыми инвариантами.*

Отождествляя инварианты $I \in A_k$ и $(\pi_{k+1,k})_*(I) \in A_{k+1}$, мы получим фильтрацию

$$A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_k \subset \ldots$$

Алгебра

$$A = \bigcup_0^\infty A_k$$

называется алгеброй всех скалярных дифференциальных инвариантов в $(\pi_{\infty,3})^{-1}(\mathrm{Orb}_0^3)$.

Ясно, что если $J \in A_k$, то производная Ли $\xi_j(J)$ этого инварианта вдоль инвариантного векторного поля $\xi_j$, $j = 1, 2$, принадлежит $A_{k+1}$. Т.о. $A$ имеет два независимых дифференцирования $\xi_1$ и $\xi_2$. По этой причине алгебра $A$ имеет конечное множество образующих. Это значит, что всякий инвариант из $A$ является функцией этих образующих и их производных Ли некоторых порядков вдоль векторных полей $\xi_1$ и $\xi_2$.

## 6.1. Образующие и соотношения

Алгебра $A_4$ порождена 6-ю независимыми инвариантами. Найдем их.

Рассмотрим инварианты $\omega^2$, $\omega^3$ and $\nu$. Они порождают два новых тензорных инварианта

$$\tilde{\omega}^2(\theta_3) = \big(L_1(\theta_2)e_1 + L_2(\theta_2)e_2\big)/L_3^{1/5},$$
$$\tilde{\omega}^3(\theta_3) = \big((\Psi^1(\theta_3)e_1 + (\Psi^2(\theta_3)e_2\big)/L_3^{3/5}.$$

Из конструкции инвариантов $\omega^2$ и $\omega^3$ следует, что

$$\tilde{\omega}^2(\theta_3) \in g, \quad \text{and} \quad \tilde{\omega}^3(\theta_3) \in g.$$

Производные Ли $\xi_i(\tilde{\omega}^j)$, $i = 1, 2$, $j = 2, 3$, этих инвариантов являются новыми тензорными инвариантами и

$$\xi_i(\tilde{\omega}^j) \in g, \quad i = 1, 2, \ j = 2, 3.$$

Сравнивая $\tilde{\omega}^2(\theta_3)$ и $\tilde{\omega}^3(\theta_3)$ с $\xi_1$ и $\xi_2$, мы получаем, что $\tilde{\omega}^2(\theta_3)$ и $\tilde{\omega}^3(\theta_3)$ линейно независимы и образуют базис в $g$. Следовательно разложения

$$\xi_i(\tilde{\omega}^j) = J^j_{i2} \cdot \tilde{\omega}^2 + J^j_{i3} \cdot \tilde{\omega}^3$$

дают 8 скалярных дифференциальных инвариантов $J^j_{ir}$, $i = 1, 2$, $j, r = 2, 3$. Однако, среди этих инвариантов нет 6-и функционально независимых.

Инвариант $\nu$ порождает инвариантную форму объема

$$\tilde{\nu} = (L_3)^{1/5} dx^1 \wedge dx^2.$$

Производные Ли этого инварианта $\xi_1(\tilde{\nu})$ и $\xi_2(\tilde{\nu})$ определяют два новых скалярных инварианта $J^1$ and $J^2$:

$$\xi_1(\tilde{\nu}) = J^1 \cdot \tilde{\nu}, \quad \xi_2(\tilde{\nu}) = J^2 \cdot \tilde{\nu}.$$

Вычисления показывают, что семейство $\{J^r_{ij}, J^1, J^2\}$ не содержит 6-и функционально независимых инварианта.

Рассмотрим пространство $\mathcal{A}_{\theta_4}$. Имеем

$$\mathcal{A}_{\theta_4} = H \oplus \mathfrak{g}_{\theta_3} \ .$$

Можно доказать, что $\mathfrak{g}_{\theta_3} = \{0\}$. Т.о. $\mathcal{A}_{\theta_4}$ является горизонтальным пространством. Напомним, что естественная проекция $\rho_{5,0} : \mathcal{A}_{\theta_4} \to T_p$, $j^5_p X \mapsto X_p$ является изоморфизмом. Далее напомним, что вектора

$$\xi_{1_{\theta_3}} = (\pi_\infty)_*(\xi_1), \quad \xi_{2_{\theta_3}} = (\pi_\infty)_*(\xi_2)$$

образуют базис в $T_p$. Через $j^5_p X_1$ и $j^5_p X_2$ обозначим такие вектора в $\mathcal{A}_{\theta_4}$, что

$$\rho_{5,0}(j^5_p X_1) = \xi_{1_{\theta_3}}, \quad \rho_{5,0}(j^5_p X_2) = \xi_{2_{\theta_3}}.$$

Тогда

$$[j^5_p X_1,\, j^5_p X_2] \in \mathcal{A}_{\theta_3}.$$

Через $j^4_p Y$ обозначим такой вектор горизонтального подпространства $\rho_{5,4}(H)$ в $\mathcal{A}_{\theta_3}$, что

$$\rho_{4,0}([j^5_p X_1,\, j^5_p X_2]) = \rho_{4,0}(j^4_p Y).$$

Тогда

$$\Delta(\theta_4) = \rho_{4,1}(j^4_p Y - [j^5_p X_1,\, j^5_p X_2]) \in g^1_{\theta_2} \subset T_p \otimes T^*_p.$$

Базис $\{\xi_{1_{\theta_3}}, \xi_{2_{\theta_3}}\}$ в $T_p$ порождает базис $\{\, e^1_1,\, e^1_2,\, e^2_1,\, e^2_2 \,\}$ в $T_p \otimes T^*_p$. Следовательно разложение

$$\Delta(\theta_4) = J^3(\theta_4)\cdot e^1_1 + J^4(\theta_4)\cdot e^1_2 + J^5(\theta_4)\cdot e^2_1 + J^6(\theta_4)\cdot e^2_2$$

порождает 4 новых скалярных инварианта $J^3$, $J^4$, $J^5$, $J^6$.

Теорема 6.2. *Инварианты*

$$J^2_{22},\ J^3_{22},\ J^1,\ J^2,\ J^3,\ J^6$$

*образуют максимальную систему функционально независимых инвариантов алгебры $A_4$.*

Ясно, что всякий скалярный инвариант $I \in A_k$ однозначно определяется своим ограничением на всякий слой $(\pi_{k,3})^{-1}(\theta_3)$, где $\theta_3 \in \mathrm{Orb}^3_0$. Выберем точку $\theta_3 \in J^3\pi$ так, что ее координаты $u^1_{y^2}$, $u^2_{y^3}$ являются ненулевыми, а все остальные координаты равны нулю. Тогда $L_1(\theta_3) = 3u^1_{22}$ and $L_3(\theta_3) = -9u^2_{222}(u^1_{22})^2$. Следовательно $\theta_3 \in \mathrm{Orb}^3_0$. Через $F^4$ обозначим слой $(\pi_{k,3})^{-1}(\theta_3)$.

Выражения ограничений инвариантов $J^2_{22}$, $J^3_{22}$, $J^1$, $J^2$, $J^3$, $J^6$ на слой $F^4$ весьма громоздки. С целью их упрощения, преобразуем эти инварианты. В результате получим следующие 6 функционально независимых инвариантов алгебры $A_4$:

$$\begin{aligned}
I^1 &= (-4J^2_{22} - 15J^3_{22}J^2 + 30J^1J^2 - 30J^3)/6,\\
I^2 &= (-11J^3_{22} + 4J^1)/18,\\
I^3 &= (5J^2)/3,\\
I^4 &= (20J^2_{22}J^2 - 15(J^3_{22})^2 - 25J^3_{22}J^1 - 10(J^1)^2 - 10J^6)/6,\\
I^5 &= (-5J^2_{22} - 20J^3_{22}J^2 + 40J^1J^2 - 40J^3)/6,\\
I^6 &= (-7J^3_{22} + 3J^1)/9.
\end{aligned}$$

Их ограничения на слой $F^4$ максимально просты:

$$\begin{aligned}
I^1|_{F^4} &= (u^4_{1111} - u^2_{1122} + 2u^1_{1222})/(u^1_{22}L_3^{1/5}),\\
I^2|_{F^4} &= (u^4_{1112} - u^2_{1222} + 2u^1_{2222})u^1_{22}/L_3^{4/5},\\
I^3|_{F^4} &= (3u^4_{1122} - 2u^3_{1222} + u^2_{2222})u^1_{22}/(u^2_{222}L_3^{2/5}),\\
I^4|_{F^4} &= (u^3_{1111} - 2u^2_{1112} + 3u^1_{1122})u^2_{222}/(u^1_{22}L_3^{3/5}),\\
I^5|_{F^4} &= (u^3_{1112} - 2u^2_{1122} + 3u^1_{1222})/(u^1_{22}L_3^{1/5}),\\
I^6|_{F^4} &= (u^3_{1122} - 2u^2_{1222} + 3u^1_{2222})u^1_{22}/L_3^{4/5}.
\end{aligned}$$

Пусть $\theta_\infty \in (\pi_{\infty,3})^{-1}(\theta_3)$. Тогда

$$\xi_1\big|_{\theta_\infty} = -3\big(u^1_{22}/L_3^{2/5}\big)D_2, \quad \xi_2\big|_{\theta_\infty} = 9\big(u^2_{222}u^1_{22}/L_3^{4/5}\big)D_1.$$

Теперь из предложения (6.1) вытекают следующие утверждения.

Теорема 6.3. *Семейство инвариантов*

$$I^1,\ I^2,\ I^3,\ I^4,\ I^5,\ I^6$$

*является системой образующих алгебры* $A$.

Теорема 6.4.

(1) *Образующие* $I^1$, $I^2$, $\dots$, $I^6$ *алгебры* $A$ *удовлетворяют 4-м дифференциальным соотношениям:*

$$5\xi_1(I^1) - 15\xi_2(I^2) + 57I^1I^3 + 1836(I^2)^2 - 2484I^2I^6 - 39I^3I^5 + 810(I^6)^2 + 20I^4 = 0,$$

$$135\xi_1(I^2) + 15\xi_2(I^3) - 90\xi_1(I^6) - 297I^2I^3 + 243I^3I^6 + 75I^1 - 50I^5 = 0,$$

$$15\xi_1(I^4) + 5\xi_2(I^5) + 225I^1I^6 - 2286I^2I^5 - 6I^3I^4 + 1539I^5I^6 - 75 = 0,$$

$$5\xi_1(I^5) - 15\xi_2(I^6) + 60I^1I^3 + 1620(I^2)^2 - 2079I^2I^6 - 40I^3I^5 + 621(I^6)^2 + 25I^4 = 0.$$

(2) *Все другие дифференциальные соотношения между образующими* $I^1$, $I^2$, $\dots$, $I^6$ *алгебры* $A$ *являются следствиями этих 4-х соотношений.*

## Список литературы

[1] Liouville R. *Sur les invariantes de certaines equationes differentielles.* // Jour. de l'Ecole Politechnique, Leipzig. — **59**, 1889, c. 7–88. ↑1

[2] Lie S. Vorlesungen über continuierliche gruppen. — Leipzig: Teubner, 1893. ↑1

[3] Lie S. Theorie der transformationsgruppen. — Leipzig: Vol. III, Teubner, 1930. ↑1

[4] Tresse A. *Sur les invariants differentiels des groupes continus de transformations* // Acta Math. — **18**, 1894, c. 1-88. ↑1

[5] Tresse A. Détermination des Invariants ponctuels de l'Equation differentielle ordinaire du second ordre: $y'' = \omega(x, y, y')$. — Leipzig: Bei S. Hirzel, 1896. — 88 c. ↑1

[6] Cartan E. *Sur les varietes a connexion projective.* // Bull. Soc. Math. France. — **52**, 1924, c. 205-241. ↑1

[7] Thomsen G. *Uber die topologischen Invarianten der Differentialgleichung* $y'' = f(x, y)y'^3 + g(x, y)y'^2 + h(x, y)y' + k(x, y)$. // Abh. Math. Sem. Hamburg. Univ. — **7**, 1930, c. 301-328. ↑1

[8] Gardner R. B. *Differential geometric methods interacting control theory.* // in R.W. Brockett et al., Eds., *Differential geometry control theory*, 1983, c. 117-180. ↑1

[9] Yumaguzhin V. A. *On the obstruction to linearizability of 2-order ordinary differential equations* // Acta Applicandae Mathematicae. — **83**, № 1-2, 2004, c. 133-148, arXiv:0804.0306. ↑1

[10] Yumaguzhin V. A. *On the obstruction to integrability of almost-complex structures* // arXiv:0804.0690v1, 2008. ↑1

[11] Singer I. M., Sternberg S. *On the infinite groups of Lie and Cartan,I.* // J. Analyse Math. — **15**, 1965, с. 1-114. ↑1

[12] Sternberg S. Lectures on Differential Geometry. — New Jersy: Prentice-Hall, Inc., 1964. — 1-114 с. ↑1

[13] Lychagin V. *Homogeneous geometric structures and homogeneous differential equations.* // The Interplay between differential Geometry and Differential Equations, AMS Translations, Advances in Math. Sciences,. — **2**, № 167, 1995, с. 143–164. ↑1

[14] Kruglikov B., Lychagin V. V. *On equivalence of differential equations.* // Acta et Comment. Univ. Tartuensis Math. — **3**, 1999, с. 7-29. ↑1

[15] Arnold V. I. Advanced chapters of the theory of ordinary differential equations. — Moscow: Nauka, 1978. — 400 с., (in Russian). ↑1, 2

[16] Alekseevskiy D. V., Lychagin V. V., Vinogradov A. M. Fundamental ideas and conceptions of differential geometry. Sovremennye problemy matematiki. Fundamental'nye napravleniy. Itogi nauki i techniki, Vol. 28. — Moscow: VINITI, AN SSSR, 1988. — 298 с., (in Russian) [English transl.: Encyclopedia of Math. Sciences, Vol.28, pp. 298, Springer, Berlin, (1991)]. ↑1

[17] Chern S. *Projective geometry, contact transformations, and CR-structures.* // Arch. Math. — **38**, 1982, с. 1-5. ↑1

[18] Юмагужин В. А., Юмагужина В. Н. *Алгоритм вычисления алгебр изотропии уравнений* $y'' = a^3(x,y)y'^{\,3} + a^2(x,y)y'^{\,2} + a^1(x,y)y' + a^0(x,y)$ // Труды международной конференции "Программные системы: теория и приложения"ИПС РАН, Переславль-Залесский. — **2**, 2006, с. 365-377. ↑1



Инстиут программных систем Российской академии наук, Россия, 152020, г. Переславль-Залесский, м. Ботик



Valeriy A. Yumaguzhin, Valeria N. Yumaguzhina. *Scalar differential invariants of equations* $y'' = a^3(x,y)y'^{\,3} + a^2(x,y)y'^{\,2} + a^1(x,y)y' + a^0(x,y)$ // Proceedings of Program Systems institute scientific conference "Program systems: Theory and applications". — Pereslavl-Zalesskij, v. **1**, 2009. — p. 105–121. — ISBN 978-5-901795-16-3 (*in Russian*).



Abstract. This paper is devoted to differential invariants of equations

$$y'' = a^3(x,y)y'^{\,3} + a^2(x,y)y'^{\,2} + a^1(x,y)y' + a^0(x,y)$$

w.r.t. point transformations. The action of the pseudogroup of all point transformations on the natural bundle of these equations is investigated. Tensor and scalar differential invariants of considered equations are constructed in this way. A complete collection of generators and their differential syzygies is obtained for the algebra of all scalar differential invariants of a wide class of considered equations containing generic equations.