

Э. Н. Вясилева

Степень термодинамического совершенства двухпоточного теплообмена^{*})

Научный руководитель: д. т. н. А. М. Цирлин

Аннотация. Найдена степень термодинамического совершенства в функциях внешних параметров для двухпоточных теплообменников в зависимости от гидродинамики потоков и организации теплообмена.

1. Введение и постановка задачи

Теплообменная система — это система, в которой осуществляется теплообмен между двумя или несколькими теплоносителями либо между теплоносителем и поверхностью твердого тела. Теплообменные системы характеризуются гидродинамикой потоков (смешением, вытеснением, перекрестным током и пр.), внешними параметрами (расходами, температурами на входе и выходе и пр.). Степень совершенства теплообменной системы при заданной суммарной тепловой нагрузке \bar{q} и суммарной поверхности (коэффициенте теплопередачи K) характеризуют необратимостью теплообмена [1] — производством энтропии σ в системе.

В работах [2, 3] показано, что величина σ ограничена снизу и равна

$$\sigma^* = \frac{W_0^2 \ln^2 \frac{T_0^0}{T_0^0 - \bar{q}/W_0}}{K - W_0 \ln \frac{T_0^0}{T_0^0 - \bar{q}/W_0}}.$$

Эта оценка достигается в трубчатом противоточном теплообменнике при выполнении дополнительных требований (условной термодинамической согласованности потоков):

$$(1) \quad \frac{W_1}{W_0} = 1 - \frac{W_0}{K} \ln \frac{T_0^0}{T_0}.$$

^{*})Представлено по тематике: *Методы оптимизации и теория управления.*

Значение σ^* позволяет оценить степень термодинамического совершенства реальных теплообменников как

$$\eta = \frac{\sigma^*}{\sigma} \leq 1$$

в зависимости от гидродинамики и взаимной направленности потоков, а значит, выяснить возможности для совершенствования системы.

В данной работе получена степень термодинамического совершенства σ для разных типов двухпоточных теплообменников рис. 1.

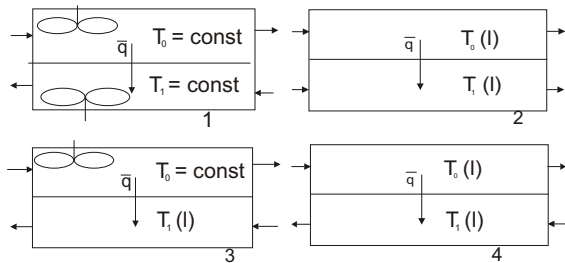


РИС. 1. Модели гидродинамики потоков теплообменных аппаратов: 1 — смешение — смешение, 2 — вытеснение — вытеснение (прямоток), 3 — смешение — вытеснение, 4 — вытеснение — вытеснение (противоток)

Назовем поток, температура которого снижается, *теплоносителем*, а поток, температура которого повышается — *хладагентом*, присвоим первому из них индекс 0, а второму — 1, температуру на входе в систему обозначим как T^0 , а температуру на выходе как \bar{T} . Они измеряются в градусах Кельвина. Водяные эквиваленты потоков обозначим через W_i ($i = 0; 1$). При этом кинетику теплообмена будем предполагать линейной (ньютоновский закон теплопереноса). Общее количество переданного тепла (тепловая нагрузка) задано

$$(2) \quad \int_0^L k [T_0(l) - T_1(l)] dl = \bar{q}.$$

Рассмотрим следующие типы гидродинамики потоков: смешение – смешение, смешение – вытеснение, вытеснение – вытеснение (прямоток и противоток). Производство энтропии при теплообмене между двумя жидкостями при постоянном давлении [4] можно выразить через водяные эквиваленты потоков (произведения их расходов на теплоемкость) W_0 и W_1 и температуры потоков на входе и выходе как:

$$(3) \quad \sigma = W_0 \ln \frac{\bar{T}_0}{T_0^0} + W_1 \ln \frac{\bar{T}_1}{T_1^0}.$$

Первое слагаемое в правой части формулы (3) отрицательно, а второе – положительно, причем $\sigma > 0$. Однако в этом выражении отсутствует связь между производством энтропии и коэффициентом теплопередачи K , между тем сравнение термодинамического совершенства двух типов теплообменников правомерно лишь при одинаковых величинах \bar{q} и K . Для получения такой связи необходимо подсчитать σ через внутренний механизм теплопереноса. Вычислив производство энтропии для разных схем, сможем оценить степень термодинамического совершенства и показать ее зависимость от водяных эквивалентов потоков.

2. Смешение – смешение

В этом случае для ньютоновского закона теплообмена тепловая нагрузка определяется следующим образом:

$$\bar{q} = K (\bar{T}_0 - \bar{T}_1) = K \left(T_0^0 - \frac{\bar{q}}{W_0} - T_1^0 - \frac{\bar{q}}{W_1} \right),$$

откуда

$$(4) \quad \bar{q} = \frac{\bar{W} K (T_0^0 - T_1^0)}{\bar{W} + K},$$

где

$$(5) \quad \bar{W} = \frac{W_1 W_0}{W_1 + W_0}.$$

Из (4) следует, что минимуму K , при заданной тепловой нагрузке и входной температуре потока, соответствует максимум \bar{W} , и обратно, максимальная интенсивность теплообмена достигается при заданном

K при $\bar{W} \rightarrow \max$. Подстановка равенства (4) в выражение (3) с учетом того, что

$$T_0^0 - T_1^0 - \frac{\bar{q}}{\bar{W}} = \frac{\bar{q}}{K},$$

приводит к равенству

$$\sigma = W_0 \ln \frac{T_0^0 - \frac{\bar{q}}{W_0}}{T_0^0} + W_1 \ln \frac{T_0^0 - \frac{\bar{q}}{\bar{W}} - \frac{\bar{q}}{K} + \frac{\bar{q}}{W_1}}{T_0^0 - \frac{\bar{q}}{\bar{W}} - \frac{\bar{q}}{K}}.$$

Степень термодинамического совершенства для схемы смешение – смешение примет вид (см. рис. 2)

$$\eta = \frac{W_0^2 \ln^2 \frac{T_0^0}{T_0^0 - \bar{q}/W_0}}{\left(K - W_0 \ln \frac{T_0^0}{T_0^0 - \bar{q}/W_0} \right) \left(W_0 \ln \frac{T_0^0 - \frac{\bar{q}}{W_0}}{T_0^0} + W_1 \ln \frac{T_0^0 - \frac{\bar{q}}{\bar{W}} - \frac{\bar{q}}{K} + \frac{\bar{q}}{W_1}}{T_0^0 - \frac{\bar{q}}{\bar{W}} - \frac{\bar{q}}{K}} \right)}.$$

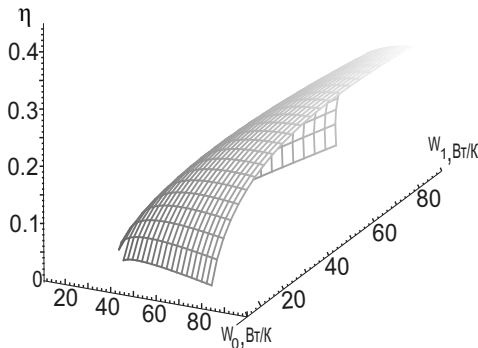


Рис. 2. Степень термодинамического совершенства для схемы смешение – смешение

3. Вытеснение – вытеснение (прямоток)

Найдем производство энтропии в теплообменнике прямоточного типа при заданной входной температуре горячего потока T_0^0 , тепловой нагрузке \bar{q} и коэффициенте теплопередачи K . Будем считать, что коэффициент, отнесенный к единице длины трубы, постоянен

$$k = \frac{K}{L}.$$

Чтобы найти производство энтропии (см. [5])

$$(6) \quad \sigma = \int_0^L q(l) \left(\frac{1}{T_1(l)} - \frac{1}{T_0(l)} \right) dl,$$

необходимо решить систему дифференциальных уравнений:

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{dT_0}{dl} = -\frac{q(l)}{W_0} = -\frac{K(T_0(l) - T_1(l))}{W_0 L}, & T_0(0) = T_0^0, \\ \frac{dT_1}{dl} = \frac{q(l)}{W_1} = \frac{K(T_0(l) - T_1(l))}{W_1 L}, & T_1(0) = T_1^0. \end{cases}$$

Решение этой системы имеет вид:

$$(8) \quad \begin{cases} T_0(l) = \frac{T_1^0 W_1 + T_0^0 W_0}{W_1 + W_0} + \frac{(T_0^0 - T_1^0) W_1 \exp\left(\frac{-Kl}{L\bar{W}}\right)}{W_1 + W_0}, \\ T_1(l) = \frac{T_1^0 W_1 + T_0^0 W_0}{W_1 + W_0} - \frac{(T_0^0 - T_1^0) W_0 \exp\left(\frac{-Kl}{L\bar{W}}\right)}{W_1 + W_0}. \end{cases}$$

Введем следующие обозначения

$$A = \frac{T_0^0 W_0 + T_1^0 W_1}{W_1 + W_0},$$

$$B = \frac{T_0^0 - T_1^0}{W_1 + W_0}.$$

В этих обозначениях равенства (8) примут форму

$$(9) \quad \begin{cases} T_0(l) = A + BW_1 \exp\left(-\frac{Kl}{\bar{W}L}\right), \\ T_1(l) = A - BW_0 \exp\left(-\frac{Kl}{\bar{W}L}\right), \end{cases}$$

где \bar{W} соответствует равенству (5). Из системы

$$(10) \quad \begin{cases} T_0(L) = A + BW_1 \exp\left(-\frac{K}{\bar{W}}\right), \\ T_1(L) = A - BW_0 \exp\left(-\frac{K}{\bar{W}}\right) \end{cases}$$

выразим K через температуры и водяные эквиваленты. Получим

$$K = \bar{W} \ln \frac{T_0^0 - T_1^0}{T_0(L) - T_1(L)}.$$

Подставим найденные температуры горячего потока и хладагента (9) в формулу (6) и вычислим интеграл. Производство энтропии для схемы вытеснение – вытеснение (прямоток) примет вид

$$(11) \quad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2,$$

где

$$\sigma_1 = W_0 \ln \left(\frac{T_0^0 W_0 + T_1^0 W_1 + (T_0^0 - T_1^0) W_1 \exp\left(-\frac{K}{\bar{W}}\right)}{(W_1 + W_0) T_0^0} \right),$$

$$\sigma_2 = W_1 \ln \left(\frac{T_0^0 W_0 + T_1^0 W_1 - (T_0^0 - T_1^0) W_0 \exp\left(-\frac{K}{\bar{W}}\right)}{(W_1 + W_0) T_1^0} \right).$$

Выразим производство энтропии через входную температуру горячего потока, водяные эквиваленты потоков, тепловую нагрузку и коэффициент теплопередачи. Для этого подставим температуры (9) в формулу (2), получим

$$\bar{q} = \frac{K}{L} \int_0^L \left((T_0^0 - T_1^0) \exp\left(-\frac{Kl}{\bar{W}L}\right) \right) dl.$$

Вычислив интеграл, найдем

$$\bar{q} = \bar{W} (T_0^0 - T_1^0) \left(1 - \exp\left(-\frac{K}{\bar{W}}\right) \right).$$

Выразим из последней формулы входную температуру холодного потока

$$T_1^0 = T_0^0 - \frac{\bar{q}}{\bar{W} \left(1 - \exp\left(-\frac{K}{\bar{W}}\right) \right)}.$$

Подставим полученное выражение в равенство (11), при этом производство энтропии для схемы вытеснение – вытеснение (прямоток) примет вид

$$\sigma = a + b - c,$$

где

$$a = W_0 \ln \left(1 + \frac{\bar{q} \left(\exp \left(-\frac{K}{\bar{W}} \right) - 1 \right)}{W_0 T_0^0 \left(1 - \exp \left(-\frac{K}{\bar{W}} \right) \right)} \right),$$

$$b = W_1 \ln \left(T_0^0 - \frac{W_1 \bar{q} - \bar{q} W_0 \exp \left(-\frac{K}{\bar{W}} \right)}{W_0 W_1 \left(1 - \exp \left(-\frac{K}{\bar{W}} \right) \right)} \right),$$

$$c = W_1 \ln \left(T_0^0 - \frac{\bar{q}}{\bar{W} \left(1 - \exp \left(-\frac{K}{\bar{W}} \right) \right)} \right).$$

Степень термодинамического совершенства для схемы вытеснение – вытеснение (прямоток) примет вид (см. рис. 3)

$$\eta = \frac{W_0^2 \ln^2 \frac{T_0^0}{T_0^0 - \bar{q}/W_0}}{\left(K - W_0 \ln \frac{T_0^0}{T_0^0 - \bar{q}/W_0} \right) (a + b - c)}.$$

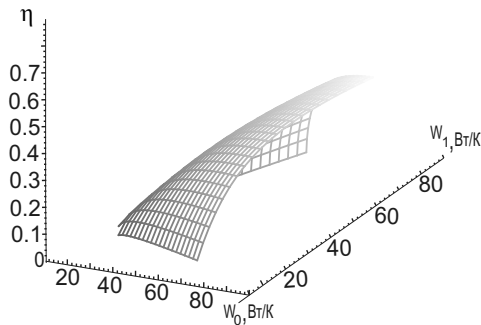


РИС. 3. Степень термодинамического совершенства для схемы вытеснение – вытеснение (прямоток)

4. Смещение – вытеснение

Будем для определенности считать, что режим смешения характеризует поток хладагента. Тогда изменение температуры потока теплоносителя определено дифференциальным уравнением

$$(12) \quad \frac{dT_0}{dl} = -\frac{K}{W_0 L} (T_0(l) - \bar{T}_1),$$

$$(13) \quad T_0(0) = T_0^0,$$

$$(14) \quad \bar{T}_0 = T_0(L).$$

Решение уравнения (12) с условиями (13), (14) имеет вид

$$(15) \quad T_0(l) = \bar{T}_1 + (T_0^0 - \bar{T}_1) \exp\left(-\frac{Kl}{W_0 L}\right).$$

Подставляя (15) в формулу (2) и интегрируя, получим

$$(16) \quad \bar{q} = -W_0 (T_0^0 - \bar{T}_1) \left(\exp\left(-\frac{K}{W_0}\right) - 1 \right).$$

Здесь $K = kL$. Выражая из формулы (16) \bar{T}_1 и учитывая, что

$$T_1^0 = \bar{T}_1 - \bar{q}/W_1,$$

получим

$$(17) \quad T_1^0 = T_0^0 - \frac{\bar{q}}{W_0 \left(-\exp\left(-\frac{K}{W_0}\right) + 1 \right)} - \frac{\bar{q}}{W_1}.$$

Подстановка этого выражения в равенство (3) помогает связать производство энтропии с параметрами потоков и коэффициентом теплопередачи. Получим

$$\sigma = W_0 \ln \frac{T_0^0 - \frac{\bar{q}}{W_0}}{T_0^0} + W_1 \ln \frac{T_0^0 - \frac{\bar{q}}{W_0 \left(-\exp\left(-\frac{K}{W_0}\right) + 1 \right)}}{T_0^0 - \frac{\bar{q}}{W_0 \left(-\exp\left(-\frac{K}{W_0}\right) + 1 \right)} - \frac{\bar{q}}{W_1}}.$$

Степень термодинамического совершенства для схемы смешение – вытеснение примет вид

$$\eta = \frac{W_0^2 \ln^2 \frac{T_0^0}{T_0^0 - \bar{q}/W_0}}{\left(K - W_0 \ln \frac{T_0^0}{T_0^0 - \bar{q}/W_0} \right) \left(W_0 \ln \frac{T_0^0 - \bar{q}/W_0}{T_0^0} + W_1 \ln \frac{T_0^0 - M}{T_0^0 - M - \frac{\bar{q}}{W_1}} \right)},$$

где

$$M = \frac{\bar{q}}{W_0 \left(-\exp\left(-\frac{K}{W_0}\right) + 1 \right)}.$$

Зависимость степени термодинамического совершенства от водяных эквивалентов потоков для схемы смешение – вытеснение показана на рис. 4.

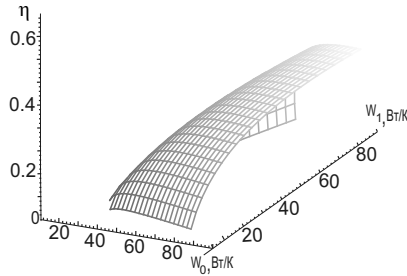


Рис. 4. Степень термодинамического совершенства для схемы смешение – вытеснение

5. Вытеснение – вытеснение (противоток)

Исследуем схему вытеснение – вытеснение (противоток) и найдем производство энтропии и коэффициент термодинамического совершенства при нарушении условий термодинамической согласованности (1). Как и выше, полагаем, что коэффициент, отнесенный к единице длины трубы, постоянен. Чтобы найти производство энтропии, необходимо решить систему дифференциальных уравнений:

$$(18) \quad \begin{cases} \frac{dT_0}{dl} = -\frac{q(l)}{W_0} = -\frac{K(T_0(l) - T_1(l))}{W_0 L}, T_0(0) = T_0^0, \\ \frac{dT_1}{dl} = -\frac{q(l)}{W_1} = -\frac{K(T_0(l) - T_1(l))}{W_1 L}, T_1(L) = T_1^0. \end{cases}$$

Введем следующие обозначения

$$\widetilde{W} = \frac{W_0 W_1}{W_0 - W_1},$$

$$C = \frac{T_0^0 W_0 \exp\left(\frac{K}{W}\right) - W_1 T_1^0}{\exp\left(\frac{K}{W}\right) W_0 - W_1},$$

$$D = \frac{(T_0^0 - T_1^0)}{\exp\left(\frac{K}{W}\right) W_0 - W_1}.$$

В этих обозначениях решение системы (18) примет вид

$$(19) \quad \begin{cases} T_0(l) = C - DW_1 \exp\left(\frac{Kl}{WL}\right), \\ T_1(l) = C - DW_0 \exp\left(\frac{Kl}{WL}\right). \end{cases}$$

Для любого l выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} \bar{T}_0 > \bar{T}_1, \\ T_1(0) < T_0^0. \end{cases}$$

Из системы (19) следует, что $W_0 < W_1$, если $\exp\left(\frac{K}{W}\right) W_0 < W_1$ и, наоборот, $W_0 > W_1$, если $\exp\left(\frac{K}{W}\right) W_0 > W_1$. Подставим найденные температуры горячего потока и хладагента (19) в формулу (6) и вычислим интеграл. Производство энтропии для схемы вытеснение – вытеснение (противоток) примет вид

$$(20) \quad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2,$$

где

$$\sigma_1 = W_0 \ln \frac{T_0^0 \exp\left(\frac{K}{W}\right) (W_0 - W_1) + T_1^0 W_1 \left(\exp\left(\frac{K}{W}\right) - 1\right)}{\left(\exp\left(\frac{K}{W}\right) W_0 - W_1\right) T_0^0},$$

$$\sigma_2 = W_1 \ln \frac{T_0^0 W_0 \left(\exp\left(\frac{K}{W}\right) - 1\right) + T_1^0 (W_0 - W_1)}{\left(\exp\left(\frac{K}{W}\right) W_0 - W_1\right) T_1^0}.$$

Выразим производство энтропии через входную температуру горячего потока, водяные эквиваленты потоков, тепловую нагрузку и коэффициент теплопередачи. Для этого подставим температуры (19) в формулу (2), получим

$$\bar{q} = \frac{K}{L} \int_0^L \left(\frac{(T_0^0 - T_1^0) \exp\left(\frac{Kl}{\bar{W}L}\right) (W_0 - W_1)}{\exp\left(\frac{K}{\bar{W}}\right) W_0 - W_1} \right) dl.$$

Вычислив интеграл, получим

$$\bar{q} = \frac{T_0^0 - T_1^0}{\exp\left(\frac{K}{\bar{W}}\right) W_0 - W_1} W_1 W_0 \left(\exp\left(\frac{K}{\bar{W}}\right) - 1 \right).$$

Исключим из последней формулы входную температуру холодного потока

$$T_1^0 = T_0^0 - \frac{\bar{q} \left(\exp\left(\frac{K}{\bar{W}}\right) W_0 - W_1 \right)}{\left(\exp\left(\frac{K}{\bar{W}}\right) - 1 \right) W_1 W_0}.$$

Подставим полученное выражение в формулу (20), тогда производство энтропии для схемы вытеснение – вытеснение (противоток) примет вид

$$\sigma = a_1 + b_1 - c_1,$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= W_0 \ln \left(1 - \frac{\bar{q}}{T_0^0 W_0} \right), \\ b_1 &= W_1 \ln \left(T_0^0 + \frac{\bar{q}}{\left(1 - \exp\left(\frac{K}{\bar{W}}\right) \right) \bar{W}} \right), \\ c_1 &= W_1 \ln \left(T_0^0 + \frac{\bar{q} \left(\exp\left(\frac{K}{\bar{W}}\right) W_0 - W_1 \right)}{\left(1 - \exp\left(\frac{K}{\bar{W}}\right) \right) W_1 W_0} \right). \end{aligned}$$

Степень термодинамического совершенства для схемы вытеснение – вытеснение (противоток) будет иметь вид

$$\eta = \frac{\left(W_0^2 \ln^2 \frac{T_0^0}{T_0^0 - \bar{q}/W_0} \right)}{\left(K - W_0 \ln \frac{T_0^0}{T_0^0 - \bar{q}/W_0} \right) (a_1 + b_1 - c_1)}.$$

Зависимость степени термодинамического совершенства от водяных эквивалентов потоков для схемы вытеснение – вытеснение (противоток) показана на рис. 5. Наибольшую степень термодинамического совершенства имеет схема вытеснение – вытеснение (противоток).

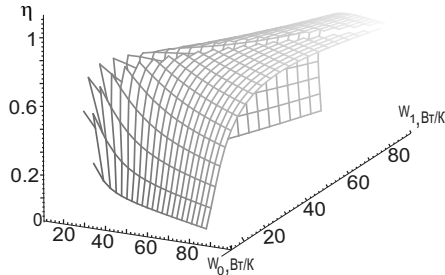


Рис. 5. Степень термодинамического совершенства для схемы вытеснение – вытеснение (противоток)

6. Заключение

В работе получены показатели термодинамического совершенства в двухпоточных теплообменниках для следующих типов гидродинамики потоков: смешение – смешение, смешение – вытеснение, вытеснение – вытеснение (прямоток), вытеснение – вытеснение (противоток), которые помогут проследить влияние таких факторов, как изменение температур входных потоков, поверхностей теплообмена и др. на возможности системы.

Список литературы

- [1] Петухова Б. С. Справочник по теплообменникам. — М.: Энергоатомиздат, 1987.
- [2] Линецкий С. Б., Цирлин А. М. Оценка термодинамического совершенства и оптимизация теплообменников. — М.: Теплоэнергетика, 1988.
- [3] Беляева Н. А., Цирлин А. М. Предельные возможности процессов теплообмена. — М.: Теплоэнергетика, 1998.
- [4] Амелькин С. А., Миронова В. А., Цирлин А. М. Математические методы термодинамики при конечном времени. — М.: Химия, 2000.
- [5] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных сотрудников и инженеров. — М.: Наука, 1984.

Список обозначений: T_0^0 — входная температура теплоносителя [K], \overline{T}_0 — выходная температура теплоносителя [K], T_1^0 — входная температура хладагента [K], \overline{T}_1 — выходная температура хладагента [K], k — коэффициент, отнесенный к единице длины трубы [Вт/К], \bar{q} — тепловая нагрузка [Вт], W_0 — водяной эквивалент теплоносителя [Вт/К], W_1 — водяной эквивалент хладагента [Вт/К].

I. N. Wjasileva. *Degree of thermodynamic perfection of two-line heat exchange*
 // Proceedings of Program Systems institute scientific-practical conference “Program
 systems: Theory and applications”, devoted to the 15th anniversary of Pereslavl
 University named A. K. Ailamazyan. — Pereslavl-Zalesskij, 2008. — p. 85–97. —
 ISBN 978-5-901795-13-2 (*in Russian*).

ABSTRACT. Degree of thermodynamic perfection has been calculated in functions of external
 parameters for two-line heat exchange systems depending on hydrodynamics of flows and
 organization of heat exchange.

Перевод проверен: старший преподаватель Л. Н. Валеева