

В. М. Касимов

Субриманова задача на группе движений плоскости^{*)}

Научный руководитель: доц. Ю. Л. Сачков

Аннотация. Рассмотрена субриманова задача на группе движений плоскости. Найдены экстремальные траектории. Произведена численная проверка выражений для времени Максвелла.

1. Постановка задачи

Рассматриваются 2 точки на двумерной плоскости и закрепленные в них вектора. Необходимо выйти из первой точки в направлении закрепленного вектора и попасть в другую, в направлении закрепленного в ней вектора (Рис. 1). Разрешается в любой момент менять скорость движения по плоскости и направление движения. Движение должно быть оптимальным, в смысле минимума длины в пространстве координат и скоростей.

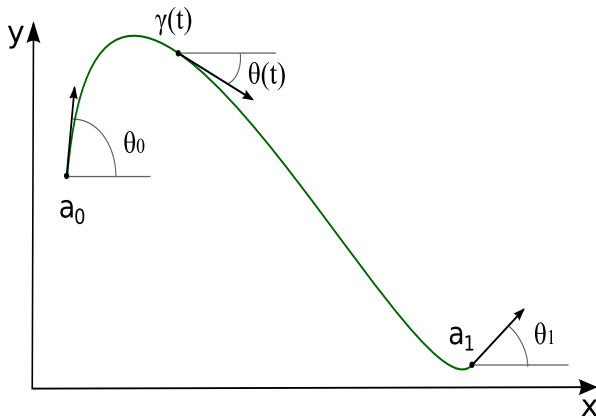


Рис. 1. Постановка задачи

^{*)}Представлено по тематике: *Методы оптимизации и теории управления.*

Эта задача имеет большое значение для робототехники (управление движением мобильным роботом на плоскости), а также физиологии зрения (восстановление поврежденного изображения), см. [5].

Математически эта задача ставится следующим образом. Рассмотрим $q = (x, y, \theta) \in M = \mathbb{R}^2 \times S^1$, где $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ — координаты точки на плоскости, а $\theta \in S^1$ — угол от оси Ox до вектора скорости кривой в данной точке. Тогда граничные условия задачи можно переписать в виде

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1.$$

Учитывая параллельные переносы и повороты плоскости, можно считать, что $q_0 = (0, 0, 0)$.

Динамика движения описывается управляемой системой:

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} = u \cos \theta, \\ \dot{y} = u \sin \theta, \\ \dot{\theta} = v. \end{cases}$$

Первые два уравнения означают, что точка (x, y) движется с линейной скоростью u в направлении θ , а третье условие — что угловая скорость равна v . Параметры u, v являются управлениями в нашей задаче: $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Критерий оптимальности: требуется минимизировать длину кривой в пространстве (x, y, θ) , то есть ставится задача:

$$l = \int_0^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\theta}^2} dt = \int_0^{t_1} \sqrt{u^2 + v^2} dt \rightarrow \min.$$

Время движения t_1 фиксировано.

Из неравенства Коши–Буняковского следует, что задача $l \rightarrow \min$ эквивалентна задаче $J = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} (u^2 + v^2) dt \rightarrow \min$.

2. Группа движений плоскости

Управляемая система (1) может быть записана в виде:

$$(2) \quad \dot{q} = uX_1(q) + vX_2(q), \quad q \in \mathbb{R}^2 \times S^1, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\text{где } X_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Эту систему можно записать как управляемую систему на группе движений плоскости $E(2)$, состоящей из всех поворотов и параллельных переносов плоскости \mathbb{R}^2 .

Группа $E(2)$ параметризуется матрицами вида:

$$q = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x \\ \sin \theta & \cos \theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этой параметризации система (2) принимает вид:

$$\dot{q} = u q A_1 + v q A_2, \quad q \in E(2), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

где $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Минимизируемый функционал $l = \int_0^{t_1} \sqrt{u^2 + v^2} dt$ есть субриманова длина кривой $q(t)$ для субримановой метрики, задаваемой полями X_1, X_2 как ортонормированным репером.

Таким образом, рассматривается субриманова задача на группе движений плоскости $E(2)$.

3. Управляемость и существование оптимальных управлений

Система называется вполне управляемой, если множество достижимости из любой точки q_0 совпадает со всем пространством состояний. Для линейных по управлению систем их глобальная управляемость может быть исследована с помощью теоремы Рашевского-Чжоу [1]:

ТЕОРЕМА 3.1. *Если многообразие M связно, а управляемая система симметрична и имеет полный ранг, то она вполне управляема.*

Рассмотрим скобку Ли полей X_1, X_2 :

$$[X_1, X_2] = \frac{\partial X_2}{\partial q} X_1 - \frac{\partial X_1}{\partial q} X_2 = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что поля X_1, X_2 и $[X_1, X_2]$ порождают все касательное пространство $T_q M$.

Применяя теорему Рашевского-Чжоу, получаем, что система (2) вполне управляема.

Существование оптимальных управлений в рассмотренной задаче следует из теоремы Филиппова [1].

4. Экстремальные кривые

Применим принцип максимума Понтрягина [2] к нашей задаче оптимального управления.

Функция Понтрягина имеет вид:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)\psi_0 + u \cos \theta \psi_1 + u \sin \theta \psi_2 + v\psi_3.$$

Система для сопряженных переменных:

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{\psi}_0 = 0, \\ \dot{\psi}_1 = 0, \\ \dot{\psi}_2 = 0, \\ \dot{\psi}_3 = u \sin \theta \psi_1 - u \cos \theta \psi_2, \end{cases}$$

где $\psi = (\psi_0, \psi_2, \psi_2, \psi_3) \neq 0, \psi_0 \leq 0$.

И из условия максимума $\mathcal{H} \rightarrow \max_{(u,v)}$ получаем:

$$(4) \quad \begin{cases} \psi_0 u + \cos \theta \psi_1 + \sin \theta \psi_2 = 0, \\ \psi_0 v + \psi_3 = 0. \end{cases}$$

5. Анормальный случай ($\psi_0 = 0$)

Рассмотрим случай $\psi_0 = 0$, тогда система (4) принимает вид

$$(5) \quad \begin{cases} \psi_1 \cos \theta + \psi_2 \sin \theta = 0, \\ \psi_3 = 0. \end{cases}$$

Из уравнения $\psi_3 = 0$ следует $\dot{\psi}_3 = 0$. Так как (3) и (5) выполняются одновременно, то получаем систему:

$$\begin{cases} \psi_1 \cos \theta + \psi_2 \sin \theta = 0, \\ \psi_1 u \sin \theta - \psi_2 u \cos \theta = 0, \quad \text{в силу } \dot{\psi}_3 = 0. \end{cases}$$

Уравнение $\psi_1 u \sin \theta - \psi_2 u \cos \theta = 0$ выполняется в случае $u \equiv 0$ или $\psi_1 \sin \theta - \psi_2 \cos \theta = 0$. Рассмотрим случай, когда $\psi_1 \sin \theta - \psi_2 \cos \theta = 0$. Тогда справедлива система:

$$(6) \quad \begin{cases} \psi_1 \cos \theta + \psi_2 \sin \theta = 0, \\ \psi_1 \sin \theta - \psi_2 \cos \theta = 0. \end{cases}$$

Домножим в (6) первое уравнение на $\sin \theta$, второе на $-\cos \theta$ и сложим полученное:

$$\psi_2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 0 \Rightarrow \psi_2 = 0.$$

Теперь домножим в (6) первое уравнение на $\cos \theta$, второе на $\sin \theta$ и сложим полученное:

$$\psi_1(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 0 \Rightarrow \psi_1 = 0.$$

В случае $\psi_1 \sin \theta - \psi_2 \cos \theta = 0$ получаем $\psi_1 = \psi_2 = 0$. Выше было получено $\psi_0 = \psi_3 = 0$, поэтому $\psi = 0$, что противоречит принципу максимума Понтрягина. Следовательно $\psi_1 \sin \theta - \psi_2 \cos \theta \neq 0$ и $u \equiv 0$.

Рассмотрим уравнение $\psi_1 \cos \theta + \psi_2 \sin \theta = 0$ и продифференцируем его по t :

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 \cos \theta - \psi_1 \sin \theta \dot{\theta} + \dot{\psi}_2 \sin \theta + \psi_2 \cos \theta \dot{\theta} &= 0, \\ \dot{\psi}_1 \cos \theta + \dot{\psi}_2 \sin \theta + \dot{\theta}(\psi_2 \cos \theta - \psi_1 \sin \theta) &= 0, \\ v(\psi_2 \cos \theta - \psi_1 \sin \theta) &= 0. \end{aligned}$$

Данное уравнение выполняется при $v \equiv 0$ или $\psi_2 \cos \theta - \psi_1 \sin \theta = 0$, но второй случай мы уже рассматривали, поэтому $v \equiv 0$.

Итак, рассмотрен аномальный случай $\psi_0 = 0$. В этом случае $u = v = 0$, и система (1) имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{y} = 0, \\ \dot{\theta} = 0. \end{cases}$$

В аномальном случае $\psi_0 = 0$ принципу максимума удовлетворяют лишь постоянные траектории $(x, y, \theta) \equiv (x_0, y_0, \theta_0)$, поэтому мы не будем их рассматривать при $(x_1, y_1, \theta_1) \neq (x_0, y_0, \theta_0)$.

6. Нормальный случай ($\psi_0 \neq 0$)

Рассмотрим случай $\psi_0 \neq 0$.

Система (3) однородна по ψ , поэтому вектор ψ можно умножить на любое положительное число (чтобы сохранилось условие максимума функции Понтрягина \mathcal{H}). Поэтому можно считать $\psi_0 = -1$. Тогда система (4) имеет вид:

$$\begin{cases} -u + \psi_1 \cos \theta + \psi_2 \sin \theta = 0, \\ -v + \psi_3 = 0. \end{cases}$$

Выразим из неё u и v :

$$(7) \quad \begin{cases} u = \psi_1 \cos \theta + \psi_2 \sin \theta, \\ v = \psi_3. \end{cases}$$

Из (1) и (7) получаем:

$$\begin{cases} \dot{x} = \psi_1 \cos^2 \theta + \psi_2 \sin \theta \cos \theta, \\ \dot{y} = \psi_1 \sin \theta \cos \theta + \psi_2 \sin^2 \theta, \\ \dot{\theta} = \psi_3. \end{cases}$$

Применим систему для сопряженных переменных (3):

$$(8) \quad \begin{cases} \dot{x} = \psi_1 \cos^2 \theta + \psi_2 \sin \theta \cos \theta, \\ \dot{y} = \psi_1 \sin \theta \cos \theta + \psi_2 \sin^2 \theta, \\ \dot{\theta} = \psi_1 (\cos \theta \psi_1 + \sin \theta \psi_2) \sin \theta - \psi_2 (\psi_1 \cos \theta + \psi_2 \sin \theta) \cos \theta, \\ \dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = 0. \end{cases}$$

Для удобства введем полярные координаты в плоскости (ψ_1, ψ_2) :

$$\begin{cases} \psi_1 = \rho \cos \delta, \\ \psi_2 = \rho \sin \delta. \end{cases}$$

Из уравнений $\dot{\psi}_1 = 0, \dot{\psi}_2 = 0$ получаем условия на $\dot{\rho}, \dot{\delta}$:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = 0, \\ \dot{\delta} = 0. \end{cases}$$

Таким образом, система уравнений (8) принимает вид:

$$(9) \quad \begin{cases} \dot{x} = \rho \cos \delta \cos^2 \theta + \rho \sin \delta \sin \theta \cos \theta, \\ \dot{y} = \rho \cos \delta \sin \theta \cos \theta + \rho \sin \delta \sin^2 \theta, \\ \dot{\theta} = (\rho \cos \delta \cos \theta + \rho \sin \delta \sin \theta)(\rho \cos \delta \sin \theta - \rho \sin \delta \cos \theta), \\ \dot{\rho} = \dot{\delta} = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим отдельно уравнение для $\ddot{\theta}$:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= (\rho \cos \delta \cos \theta + \rho \sin \delta \sin \theta)(\rho \cos \delta \sin \theta - \rho \sin \delta \cos \theta) = \\ &= \rho^2 \cos(\theta - \delta) \sin(\theta - \delta) = \frac{1}{2} \rho^2 \sin(2\theta - 2\delta), \\ 2\ddot{\theta} &= \rho^2 \sin(2\theta - 2\delta). \end{aligned}$$

Сделаем замену $\gamma = 2\theta - 2\delta + \pi$. Тогда $\ddot{\gamma} = 2\ddot{\theta}$, и получаем уравнение маятника:

$$\ddot{\gamma} = -\rho^2 \sin \gamma,$$

то есть:

$$\begin{cases} \frac{d\gamma}{dt} = c, \\ \frac{dc}{dt} = -\rho^2 \sin \gamma. \end{cases}$$

В случае $\rho \neq 0$ сделаем замену $\frac{c}{\rho} = d, \rho t = s$, и обозначая через $'$ производную по s , получаем:

$$(10) \quad \begin{cases} \gamma' = d, \\ d' = -\sin \gamma. \end{cases}$$

то есть стандартное уравнение маятника:

$$\gamma'' = -\sin \gamma.$$

Функция $E = \frac{d^2}{2} - \cos \gamma$ есть энергия маятника.

$$\frac{dE}{ds} = d(-\sin \gamma) + \sin \gamma d = 0,$$

поэтому E есть первый интеграл. Очевидно, что $E \in [-1, +\infty)$.

Для того чтобы проинтегрировать систему (9), воспользуемся эллиптическими координатами в фазовом пространстве маятника (10), введенными в работе [3].

6.1. Случай $E \in (-1, 1)$.

Рассмотрим отображение $(\gamma, d) \rightarrow (k, \varphi)$, такое что:

$$(11) \quad \begin{cases} \sin \frac{\gamma}{2} = k \operatorname{sn} \varphi, \\ \cos \frac{\gamma}{2} = \operatorname{dn} \varphi, \\ \frac{d}{2} = k \operatorname{cn} \varphi, \\ k = \sqrt{\frac{1+E}{2}} = \sqrt{\frac{d^2}{4} + \sin^2 \frac{\gamma}{2}}, \quad k \in (0, 1). \end{cases}$$

Здесь и далее используются эллиптические функции Якоби $\operatorname{sn}(\phi, k)$, $\operatorname{cn}(\phi, k)$, $\operatorname{dn}(\phi, k)$, $E(\phi, k)$, см. [4].

Непосредственное дифференцирование показывает, что система (10) при применении к ней отображения $(\gamma, d) \rightarrow (k, \varphi)$ с условиями (11) принимает вид:

$$k' = 0, \quad \varphi' = 1,$$

поэтому:

$$\begin{cases} k = \text{const}, \\ \varphi = \varphi_0 + s = \varphi_0 + \rho t. \end{cases}$$

Используя равенства (11), получаем:

$$\begin{aligned} k \operatorname{sn} \varphi &= \sin \frac{\gamma}{2} = \sin(\theta - \delta + \frac{\pi}{2}) = \cos(\theta - \delta), \\ \operatorname{dn} \varphi &= \cos \frac{\gamma}{2} = \cos(\theta - \delta + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\theta - \delta), \end{aligned}$$

откуда:

$$\begin{cases} \cos \theta = \cos(\theta - \delta + \delta) = k \operatorname{sn} \varphi \cos \delta + \operatorname{dn} \varphi \sin \delta, \\ \sin \theta = \sin(\theta - \delta + \delta) = -\operatorname{dn} \varphi \cos \delta + k \operatorname{sn} \varphi \sin \delta. \end{cases}$$

Подставим получившиеся значения для $\cos \theta, \sin \theta$ в систему (9):

$$\begin{cases} \cos \theta = k \operatorname{sn} \varphi \cos \delta + \operatorname{dn} \varphi \sin \delta, \\ \sin \theta = -\operatorname{dn} \varphi \cos \delta + k \operatorname{sn} \varphi \sin \delta, \\ \dot{x} = \rho \cos \delta - \rho \operatorname{dn}^2 \varphi \cos \delta + \rho k \operatorname{sn} \varphi \operatorname{dn} \varphi \sin \delta, \\ \dot{y} = \rho \sin \delta - \rho k \operatorname{sn} \varphi \operatorname{dn} \varphi \cos \delta - \rho \operatorname{dn}^2 \varphi \sin \delta, \\ \dot{\rho} = \dot{\delta} = 0. \end{cases}$$

Из начальных условий следует, что $(\cos \theta, \sin \theta) = (1, 0)$, поэтому $\sin \delta = \operatorname{dn} \varphi_0, \cos \delta = k \operatorname{sn} \varphi_0$.

Итак, в случае $\psi_0 \neq 0$ и $E \in (-1, 1)$ система (9) эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} \dot{x} = \rho \cos \delta - \rho \operatorname{dn}^2 \varphi \cos \delta + \rho k \operatorname{sn} \varphi \operatorname{dn} \varphi \sin \delta, \\ \dot{y} = \rho \sin \delta - \rho k \operatorname{sn} \varphi \operatorname{dn} \varphi \cos \delta - \rho \operatorname{dn}^2 \varphi \sin \delta, \\ \cos \theta = k \operatorname{sn} \varphi \cos \delta + \operatorname{dn} \varphi \sin \delta, \\ \sin \theta = -\operatorname{dn} \varphi \cos \delta + k \operatorname{sn} \varphi \sin \delta, \\ \varphi_0 = \text{const}, \quad k = \text{const}, \quad \rho = \text{const}, \\ \cos \delta = k \operatorname{sn} \varphi_0, \quad \sin \delta = \operatorname{dn} \varphi_0, \\ \varphi = \varphi_0 + \rho t. \end{cases}$$

Проинтегрировав эту систему, получаем, что экстремальные траектории (x, y, θ) выражаются формулами:

$$\begin{cases} x = \rho t k \operatorname{sn} \varphi_0 - \\ - k [E(\varphi_0 + \rho t) - E(\varphi_0)] \operatorname{sn} \varphi_0 - k [\operatorname{cn}(\varphi_0 + \rho t) - \operatorname{cn} \varphi_0] \operatorname{dn} \varphi_0, \\ y = \rho t \operatorname{dn} \varphi_0 + \\ + k^2 [\operatorname{cn}(\varphi_0 + \rho t) - \operatorname{cn} \varphi_0] \operatorname{sn} \varphi_0 - [E(\varphi_0 + \rho t) - E(\varphi_0)] \operatorname{dn} \varphi_0, \\ \cos \theta = k \operatorname{sn}(\varphi_0 + \rho t) k \operatorname{sn} \varphi_0 + \operatorname{dn}(\varphi_0 + \rho t) \operatorname{dn} \varphi_0, \\ \sin \theta = -\operatorname{dn}(\varphi_0 + \rho t) k \operatorname{sn} \varphi_0 + k \operatorname{sn}(\varphi_0 + \rho t) \operatorname{dn} \varphi_0, \\ \varphi_0 = \text{const}, \quad \rho = \text{const}, \quad k = \text{const}. \end{cases}$$

На рисунках 2 и 3 изображены экстремальные траектории (x, y) в случае $E \in (-1, 1)$ при разных значений ρ, k, φ_0 .

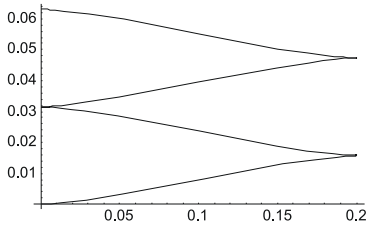


Рис. 2. $\rho = 1$,
 $k = 0.1, \varphi_0 = 0$

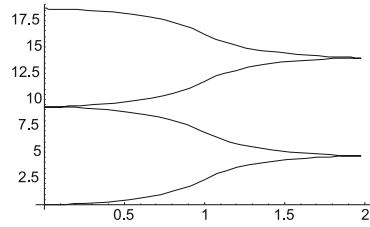


Рис. 3. $\rho = 1$,
 $k > 0.9, \varphi_0 = 0$

6.2. Случай $E > 1$.

В этом случае эллиптические координаты задаются отображением $(\gamma, d) \rightarrow (k, \varphi)$, таким что:

$$(12) \quad \begin{cases} \sin \frac{\gamma}{2} = \pm \operatorname{sn} \frac{\varphi}{k}, \\ \cos \frac{\gamma}{2} = \operatorname{cn} \frac{\varphi}{k}, \\ \frac{d}{2} = \pm \frac{1}{k} \operatorname{dn} \frac{\varphi}{k}, \\ k = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+E}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{d^2}{4} + \sin^2 \frac{\gamma}{2}}}, \quad k \in (0, 1). \end{cases}$$

Аналогично пункту 6.1, получаем:

$$k' = 0, \quad \varphi' = 1,$$

то есть:

$$\begin{cases} k = \operatorname{const}, \\ \varphi = \varphi_0 + s = \varphi_0 + \rho t. \end{cases}$$

Из формул (12) следует, что:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn} \frac{\varphi}{k} &= \pm \sin \frac{\gamma}{2} = \pm \sin(\theta - \delta + \frac{\pi}{2}) = \pm \cos(\theta - \delta), \\ \operatorname{cn} \frac{\varphi}{k} &= \cos \frac{\gamma}{2} = \cos(\theta - \delta + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\theta - \delta), \end{aligned}$$

откуда находим $\cos \theta, \sin \theta$:

$$\begin{cases} \cos \theta = \pm \operatorname{sn} \frac{\varphi}{k} \cos \delta + \operatorname{cn} \frac{\varphi}{k} \sin \delta, \\ \sin \theta = -\operatorname{cn} \frac{\varphi}{k} \cos \delta \pm \operatorname{sn} \frac{\varphi}{k} \sin \delta. \end{cases}$$

Подставим получившиеся значения для $\cos \theta, \sin \theta$ в систему (9)

$$\begin{cases} \cos \theta = \pm \operatorname{sn} \frac{\varphi}{k} \cos \delta + \operatorname{cn} \frac{\varphi}{k} \sin \delta, \\ \sin \theta = -\operatorname{cn} \frac{\varphi}{k} \cos \delta \pm \operatorname{sn} \frac{\varphi}{k} \sin \delta, \\ \dot{x} = \rho \operatorname{sn}^2 \frac{\varphi}{k} \cos \delta \pm \rho \operatorname{cn} \frac{\varphi}{k} \operatorname{sn} \frac{\varphi}{k} \sin \delta, \\ \dot{y} = \mp \rho \operatorname{cn} \frac{\varphi}{k} \operatorname{sn} \frac{\varphi}{k} \cos \delta + \rho \operatorname{sn}^2 \frac{\varphi}{k} \sin \delta, \\ \dot{\rho} = \dot{\delta} = 0. \end{cases}$$

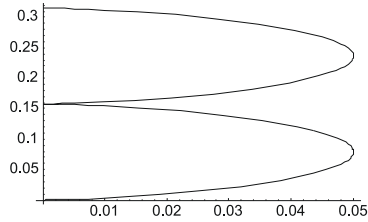
Из начальных условий следует, что $(\cos \theta, \sin \theta) = (1, 0)$, поэтому $\sin \delta = \operatorname{cn} \frac{\varphi_0}{k}$, $\cos \delta = \pm \operatorname{sn} \frac{\varphi_0}{k}$.

Итак, в случае $\psi_0 \neq 0$ и $E > 1$ система (9) эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} \dot{x} = \rho \operatorname{sn}^2 \frac{\varphi}{k} \cos \delta \pm \rho \operatorname{cn} \frac{\varphi}{k} \operatorname{sn} \frac{\varphi}{k} \sin \delta, \\ \dot{y} = \mp \rho \operatorname{cn} \frac{\varphi}{k} \operatorname{sn} \frac{\varphi}{k} \cos \delta + \rho \operatorname{sn}^2 \frac{\varphi}{k} \sin \delta, \\ \cos \theta = \pm \operatorname{sn} \frac{\varphi}{k} \cos \delta + \operatorname{cn} \frac{\varphi}{k} \sin \delta, \\ \sin \theta = -\operatorname{cn} \frac{\varphi}{k} \cos \delta \pm \operatorname{sn} \frac{\varphi}{k} \sin \delta, \\ \varphi_0 = \text{const}, \quad k = \text{const}, \quad \rho = \text{const}, \\ \cos \delta = \pm \operatorname{sn} \frac{\varphi_0}{k}, \quad \sin \delta = \operatorname{cn} \frac{\varphi_0}{k}, \\ \varphi = \varphi_0 + \rho t. \end{cases}$$

Проинтегрировав эту систему, получаем, что (x, y, θ) выражаются формулами:

$$\begin{cases} x = \pm \frac{1}{k} \left[\operatorname{dn} \frac{\varphi_0}{k} - \operatorname{dn} \left(\frac{\varphi_0 + \rho t}{k} \right) \right] \operatorname{cn} \frac{\varphi_0}{k} \pm \\ \pm \frac{1}{k^2} \left[\rho t + k \left(E \left(\frac{\varphi_0}{k} \right) - E \left(\frac{\varphi_0 + \rho t}{k} \right) \right) \right] \operatorname{sn} \frac{\varphi_0}{k}, \\ y = \frac{1}{k^2} \left[\rho t + k \left(E \left(\frac{\varphi_0}{k} \right) - E \left(\frac{\varphi_0 + \rho t}{k} \right) \right) \right] \operatorname{cn} \frac{\varphi_0}{k} + \\ + \frac{1}{k} \left[\operatorname{dn} \left(\frac{\varphi_0 + \rho t}{k} \right) - \operatorname{dn} \frac{\varphi_0}{k} \right] \operatorname{sn} \frac{\varphi_0}{k}, \\ \cos \theta = \operatorname{sn} \frac{\varphi_0 + \rho t}{k} \operatorname{sn} \frac{\varphi_0}{k} + \operatorname{cn} \frac{\varphi_0 + \rho t}{k} \operatorname{cn} \frac{\varphi_0}{k}, \\ \sin \theta = \mp \operatorname{cn} \frac{\varphi_0 + \rho t}{k} \operatorname{sn} \frac{\varphi_0}{k} \pm \operatorname{sn} \frac{\varphi_0 + \rho t}{k} \operatorname{cn} \frac{\varphi_0}{k}, \\ \varphi_0 = \text{const}, \quad k = \text{const}, \quad \rho = \text{const}. \end{cases}$$

Рис. 4. $\rho = 1, k = 0.1, \varphi_0 = 0$

На рисунке 4 изображены экстремальные траектории (x, y) в случае $E > 1$ при $\rho = 1, k = 0.1, \varphi_0 = 0$.

6.3. Случай $E = 1$.

6.3.1. $d \neq 0$

Рассмотрим отображение $(\gamma, d) \rightarrow (k, \varphi)$, такое что:

$$(13) \quad \begin{cases} \sin \frac{\gamma}{2} = \operatorname{th} \varphi, \\ \cos \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{\operatorname{ch} \varphi}, \\ \frac{d}{2} = \frac{1}{\operatorname{ch} \varphi}, \\ k = 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что $\varphi' = 1$, поэтому:

$$\begin{cases} k = 1, \\ \varphi = \varphi_0 + s = \varphi_0 + pt. \end{cases}$$

Аналогично пунктам 6.1 и 6.2, найдем $\cos \theta, \sin \theta$:

$$\begin{cases} \cos \theta = \operatorname{th} \varphi \cos \delta + \frac{1}{\operatorname{ch} \varphi} \sin \delta, \\ \sin \theta = -\frac{1}{\operatorname{ch} \varphi} \cos \delta + \operatorname{th} \varphi \sin \delta. \end{cases}$$

Из начальных условий следует, что $(\cos \theta, \sin \theta) = (1, 0)$, поэтому $\sin \delta = \frac{1}{\operatorname{ch} \varphi_0}$, $\cos \delta = \operatorname{th} \varphi_0$.

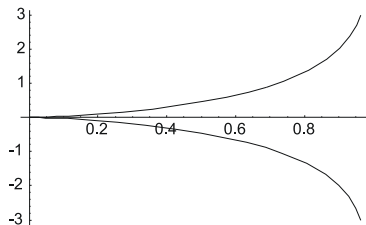


Рис. 5. Кривая (x, y) при $E = 1$ в окрестности нуля

Подставляем значения $\cos \theta, \sin \theta, \cos \delta, \sin \delta$ в систему (9):

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{2}\rho [2 - \operatorname{ch} \rho t + \operatorname{ch}(2\varphi_0 + \rho t)] \frac{1}{\operatorname{ch} \varphi_0} \frac{1}{\operatorname{ch}(\varphi_0 + \rho t)} \operatorname{th}(\varphi_0 + \rho t), \\ \dot{y} = 2\rho \operatorname{ch} \left(\varphi_0 + \frac{\rho t}{2} \right) \frac{1}{\operatorname{ch} \varphi_0} \frac{1}{\operatorname{ch}(\varphi_0 + \rho t)} \operatorname{sh} \frac{\rho t}{2} \operatorname{th}(\varphi_0 + \rho t), \\ \varphi_0 = \operatorname{const}, \rho = \operatorname{const}. \end{cases}$$

Проинтегрировав с учетом начальных условий, получаем:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \varphi_0} - \frac{1}{\operatorname{ch} \varphi_0} \left[-\rho t \operatorname{sh} \varphi_0 + \frac{1}{\operatorname{ch}(\varphi_0 + \rho t)} (1 + \operatorname{sh}(\rho t) \operatorname{th} \varphi_0) \right], \\ y = \frac{1}{\operatorname{ch} \varphi_0} \left[\rho t + \frac{1}{\operatorname{ch}(\varphi_0 + \rho t)} \operatorname{sh} \varphi_0 - \operatorname{th}(\varphi_0 + \rho t) \right], \\ \cos \theta = \operatorname{th}(\varphi_0 + \rho t) \operatorname{th} \varphi_0 + \frac{1}{\operatorname{ch}(\varphi_0 + \rho t)} \frac{1}{\operatorname{ch} \varphi_0}, \\ \sin \theta = -\frac{1}{\operatorname{ch}(\varphi_0 + \rho t)} \operatorname{th} \varphi_0 + \operatorname{th}(\varphi_0 + \rho t) \frac{1}{\operatorname{ch} \varphi_0}, \\ \rho = \operatorname{const}, \quad \varphi_0 = \operatorname{const}. \end{cases}$$

На рисунках 5 и 6 изображена траектория (x, y) при $\rho = 1, \varphi_0 = 0$ с разными временными отрезками в случае $E = 1$. На рисунке 5 представлено локальное поведение экстремальной кривой вблизи нуля. На рисунке 6 — глобальное поведение этой же кривой.

6.3.2. $d = 0$

Из того что $d = 0$, получаем, что:

$$E = -\cos \gamma, \quad \theta = \delta.$$

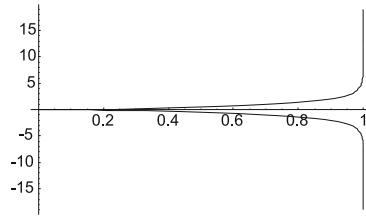


Рис. 6. Кривая (x, y) при $E = 1$: общее поведение

Из начального условия $\theta = 0$ следует:

$$\begin{cases} \cos \theta = \cos \delta = 1, \\ \sin \theta = \sin \delta = 0. \end{cases}$$

Подставим значения $\cos \theta, \sin \theta, \cos \delta, \sin \delta$ в систему (9) и проинтегрируем с учетом начальных условий $(x, y)(0) = (0, 0)$:

$$\begin{cases} x = \rho t, \\ y = 0, \\ \theta = 0, \\ \rho = \text{const}. \end{cases}$$

Итак, в случае $E = 1, d = 0$ экстремальные траектории представляются в виде $(x, y, \theta)(t) = (\rho t, 0, 0)$, где $\rho = \text{const}$.

6.4. Случай $E = -1$

Из условия $E = -1$ получаем, что $d = 0, \gamma = 0$, поэтому $\theta = \delta - \frac{\pi}{2}$. Из начальных условий $(\theta, x, y)(0) = (0, 0, 0)$ следует, что $\delta = \frac{\pi}{2}$. Мы получили $\theta(t) = 0$. Подставляем значения $\cos \theta, \sin \theta, \cos \delta, \sin \delta$ в систему (9):

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{y} = 0. \end{cases}$$

Проинтегрировав эту систему с учетом начальных условий, получаем, что решением будет стационарная точка $(x, y, \theta)(t) = (0, 0, 0)$.

6.5. Случай $\rho = 0$

В этом случае система (9) принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{y} = 0, \\ \dot{\theta} = 0. \end{cases}$$

Проинтегрировав с учетом начальных условий, получаем при $v_0 =$
 $= \psi_3(0) (x, y, \theta)(t) = (0, 0, v_0 t)$.

7. Численная проверка точек самопересечения траекторий

В работе И. Моисеева и Ю. Л. Сачкова [5] были получены времена \mathbf{t} пересечения экстремальных траекторий исследуемой задачи для разных значений энергии маятника. В данной работе была сделана численная проверка времени в системе Mathematica [6]. Для этого были построены семейства экстремальных траекторий за время $\mathbf{t} - \varepsilon$, \mathbf{t} и $\mathbf{t} + \varepsilon$. Таким образом, было наглядно показано что в момент \mathbf{t} происходит самопересечение траекторий, то есть после момента времени \mathbf{t} траектории не могут быть оптимальными.

На рисунках 7 и 8 изображены семейства экстремальных траекторий за время $\mathbf{t} - \varepsilon$ и \mathbf{t} для случая $E \in (-1, 1)$. На рисунках 9 и 10— семейства экстремальных траекторий для случая $E > 1$.

8. Выводы

В данной работе была рассмотрена субриманова задача на группе движений плоскости, доказана управляемость соответствующей управляемой системы, найдены все экстремальные траектории в этой задаче оптимального управления, проведена численная проверка точек пересечения экстремальных траекторий, полученных в работе [5]. Осталось найти оптимальное управление для поставленной задачи. Для этого нужно для каждой конечной точки $q_1 \in M$ найти оптимальную траекторию, соединяющую начальную точку $q_0 = (0, 0, 0)$ с точкой q_1 . Для решения этой задачи в настоящее время создается программа в системе Mathematica [6].

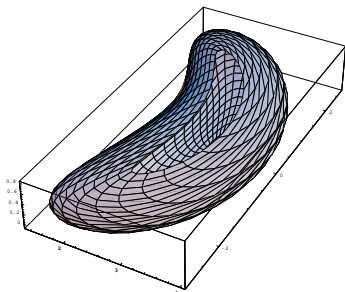


Рис. 7. $t = \mathbf{t} - \varepsilon$, $E \in (-1, 1)$

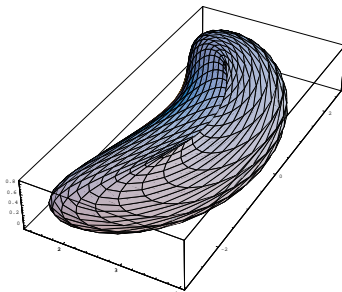


Рис. 8. $t = \mathbf{t}$, $E \in (-1, 1)$

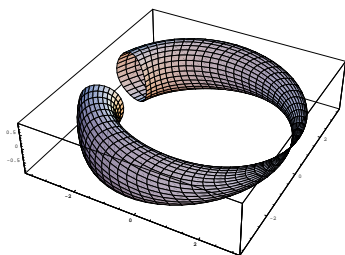


Рис. 9. $t = \mathbf{t} - \varepsilon$, $E > 1$

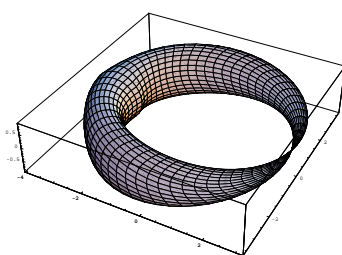


Рис. 10. $t = \mathbf{t}$, $E > 1$

Список литературы

- [1] Аграчёв А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. — М.: Физматлит, 2005. — 392 с.

- [2] Зеликин М.И. Оптимальное управление и вариационное исчисление. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 159 с.
- [3] Сачков Ю.Л. *Дискретные симметрии в обобщённой задаче Дидоны* // Математический сборник, Т. 197, № 2, 2006, с. 95–116.
- [4] Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. — М.: УРСС, 2002.
- [5] Moiseev I., Sachkov Yu.L. *Cut locus for the sub-Riemannian problem on $E(2)$* // In preparation.
- [6] Wolfram S. Mathematica: a system for doing mathematics by computer. — Redwood City, CA, USA: Addison-Wesley, 1991. — 961 pp.

V. M. Kasimov. *The sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane* // Proceedings of Program Systems institute scientific-practical conference “Program systems: Theory and applications”, devoted to the 15th anniversary of Pereslavl University named A. K. Ailamazyan. — Pereslavl-Zalesskij, 2008. — p. 133–148. — ISBN 978-5-901795-13-2 (*in Russian*).

ABSTRACT. A sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane is considered. Extremal trajectories are described. Expressions for Maxwell times are verified numerically.

Перевод проверен: доц. Ю. Л. Сачков