НАУКОЁМКИЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ. Переславль-Залесский, **2009**

А. А. Ефимова

Задача о степени устойчивости матрицы и линейные неравенства

Научный руководитель: В. В. Трушков

Аннотация. Рассмотрена задача о степени устойчивости матрицы. Показано, что ее решение сводится к решению линейного неравенства.

1. Введение

В теории управления часто бывает важным выяснить степень устойчивости линейных систем дифференциальных уравнений ([1])

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Эта задача сводится к определению степени устойчивости матрицы A, т.е. к вычислению

$$\mu = -\max_i \mathrm{Re}(\lambda_i(A)),$$

где $\lambda_i(A)$ — собственные значения матрицы A, $i = \overline{1, n}$.

Имеется множество работ, в которых решается задача об определении максимальной степени устойчивости. Нельзя не отметить множество работ по этой тематике А.М. Шубладзе и его учеников (см. статью [2] и библиографию в ней). Стандартный способ исследования связан с вычислением определителей из критерия Рауса-Гурвица, частотных критериев типа Михайлова или Найквиста или же их комбинацией. Сложность решения задачи с помощью этих критериев связана с тем, что в такой формулировке задача является минимаксной. В результате имеется множество работ, в которых рассматриваются многочисленные частные случаи при небольшом порядке матриц.

В работе предложен способ, сводящий задачу об определении степени устойчивости для произвольной матрицы к решению линейного неравенства.

2. Постановка задачи

Пусть дана матрица A, у которой действительные части собственных чисел отрицательны (например, такой матрицей может быть отрицательно определенная матрица). Необходимо найти ее степень устойчивости, т.е. $\mu = -\max_i \operatorname{Re}(\lambda_i(A))$, где λ_i — собственные значения матрицы A, $i = \overline{1,n}$.

Доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. *Число μ меньше степени устойчивости матрицы A, у которой $\operatorname{Re}(\lambda_i(A)) < 0$, $i = \overline{1,n}$, если для положительно определенной симметрической матрицы X матрица*

$$B = A^T X + XA + 2\mu X \tag{$*$}$$

отрицательно определена.

Доказательство. Пусть λ_0 — некоторое собственное значение матрицы A, x_0 — соответствующий ему собственный вектор. Рассмотрим выражение $x_0^T B x_0$:

$$x_0^T A^T X x_0 + x_0^T X A x_0 + 2\mu x_0^T X x_0 =$$
$$= \overline{\lambda}_0 x_0^T X x_0 + \lambda_0 x_0^T X x_0 + 2\mu x_0^T X x_0 =$$
$$= 2(\operatorname{Re}\lambda_0 + \mu) x_0^T X x_0.$$

Так как матрица X положительно определена, т.е. $x^T X x > 0$ для всех $x \neq 0$, то это выражение является неположительным, если $\mu \leqslant |\operatorname{Re}\lambda_0|$, в силу произвольности выбора λ_0, x_0. □

Эта теорема позволяет конструктивно находить оценку границы устойчивости матрицы. Подставим в ($*$) произвольную положительно определенную матрицу X. Для определения μ необходимо решить неравенства, возникающие из критерия Сильвестра [3].

3. Примеры

Рассмотрим применимость доказанной теоремы на матрицах порядка 2.

Пример 1. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим $X = \int\limits_0^\infty e^{A^T t} e^{At}\, dt$:

$$X = \int\limits_0^\infty \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица положительно определена.

Теперь вычислим $A^T X + XA + 2\mu X$:

$$A^T X + XA + 2\mu X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + 2\mu \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mu - 1 & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{2} - 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы эта матрица была отрицательно определена, необходимо, чтобы $\mu < 1$.

Оценка, полученная с помощью доказанной теоремы, является точной, поскольку

$$-\max_i \operatorname{Re}(\lambda_i(A)) = -\max\{-1, -2\} = 1.$$

Пример 2. Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

и

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выражение $B = A^T X + XA + 2\mu X$ равно

$$B = \begin{pmatrix} 2\mu - 4 & -1 \\ -1 & 2\mu - 4 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица устойчива, если $\mu \leqslant \frac{3}{2}$. Данный пример иллюстрирует, что произвольный выбор матрицы X может привести к довольно грубым оценкам. Если бы мы, как в прошлый раз, использовали матрицу

$$X = \int\limits_0^\infty e^{A^T t} e^{At}\, dt,$$

то получили бы более точную оценку: $\mu \leqslant \frac{16}{9}$. Заметим, что точная граница в данном случае равна 2.

Пример 3. В задачах теории управления часто бывает необходимо выбрать такой параметр в матрице, чтобы она имела максимальную степень устойчивости. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -1 \end{pmatrix},$$

в которой φ является параметром.

Рассмотрим матрицу $X = \int\limits_0^\infty e^{A^T t} e^{At}\, dt$. Заметим, что

$$e^{At} = e^{A^T t} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(t\sin\varphi) & \operatorname{sh}(t\sin\varphi) \\ \operatorname{sh}(t\sin\varphi) & \operatorname{ch}(t\sin\varphi) \end{pmatrix}.$$

Проводя вычисления, получаем

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos^2\varphi} & \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} \\ \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} & \frac{1}{\cos^2\varphi} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для определения степени устойчивости нам необходимо исследовать на неположительную определенность матрицу

$$\begin{pmatrix} \mu - \cos^2\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \mu - \cos^2\varphi \end{pmatrix}.$$

Получаем, что степень устойчивости матрицы не меньше 1, причем это значение достигается при $\varphi = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Покажем, что полученная оценка является точной. Собственные значения рассматриваемой матрицы равны

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sin\varphi.$$

Нетрудно видеть, что максимальная степень устойчивости, равная 1, достигается при $\varphi = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

4. Результаты

(1) Доказана теорема, позволяющая свести задачу об определении степени устойчивости матрицы к решению линейного неравенства.
(2) Рассмотрены иллюстрирующие эту теорему примеры.

5. Выводы

В работе задача о нахождении оценки для степени устойчивости матрицы сведена к проверке условий критерия Сильвестра. Это позволяет эффективно находить границу устойчивости матрицы.

Список литературы

[1] Трушков В. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Учебное пособие. — Переславль-Залесский: Изд-во «Университет города Переславля», 2008. — 319 с. ↑1

[2] Шубладзе А. М., Попадько В. Е., Якушева А. А., Кузнецов С. И. *Исследование оптимальных по степени устойчивости решений при ПИД управлении. Часть 1* // Сборник трудов "Управление большими системами". — М.: ИПУ РАН, 2006, с. 86–100. ↑1

[3] Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. — 5-е изд., исправленное. — М.: Добросвет, МЦНМО, 1998. — 320 с. ↑2

A. A. Efimova. *The problems about degree of steady for matrix and linear inequalities* // Proceedings of Junior research and development conference of Ailamazyan Pereslavl university. — Pereslavl, 2009. — p. 71–75. (*in Russian*).

Abstract. The problem of the degree of stability of the matrix array has been analyzed. It has been established that its solution is amounted to the solution of a linear inequality.