

А. П. Маштаков

## Приближенное решение задачи управления для нелинейных пятимерных систем на основе нильпотентной аппроксимации

Научный руководитель: д.ф.-м.н. Ю. Л. Сачков

Аннотация. Рассмотрена задача управления нелинейными пятимерными системами, линейно зависящими от двумерного управления. Приведен алгоритм построения нильпотентной аппроксимации. Решена задача управления канонической нильпотентной системой в классе кусочно-постоянных управлений. Процедура приближенного управления продемонстрирована на системе, описывающей качение шара по плоскости, и системе, моделирующей движение машины с двумя прицепами.

### 1. Введение

Рассматривается задача управления:

$$(1.1) \quad \dot{x} = u_1(t)X_1(x) + u_2(t)X_2(x), \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = x_1,$$

где  $x \in \mathbb{R}^5$ ,  $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ , и  $X_1, X_2$  — гладкие векторные поля, такие, что система вполне управляема [1]. Нелинейная система (1.1), линейно зависящая от управлений, количество которых меньше, чем размерность пространства состояний, характеризуется тем, что возможность передвижения неодинакова по различным направлениям. Величина смещения в направлении полей  $X_1$  и  $X_2$  за малое время  $t$  есть  $O(t)$ , в направлении коммутатора  $X_3 = [X_1, X_2]$  есть  $O(t^2)$ , в направлении  $X_4 = [X_1, X_3]$  и  $X_5 = [X_2, X_3]$  есть  $O(t^3)$ . В силу этой анизотропии пространства состояний, задача управления для таких систем весьма нетривиальна.

В настоящее время не существует способа в явном виде решать поставленную задачу. Тем не менее, она возникает в инженерии, где достаточно приближенного решения, погрешность которого не превышает наперед заданной. Например, такой вид имеет задача управления машиной с двумя прицепами и задача управления катящимся по плоскости шаром.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта НОУ ИПС „Университет города Переславля“, а также Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проект 09-01-00246-а.

Конструктивная задача управления активно изучается в последнее время в современной нелинейной теории управления. Эта задача имеет удовлетворительное решение лишь для некоторых специальных классов систем [2–4]. Однако системы общего положения с двумя управлениями имеют вектор роста  $(2, 3, 5)$ , потому эти результаты неприменимы к таким системам.

В данной работе представлен способ отыскания приближенного решения задачи (1.1), основанный на построении нильпотентной аппроксимации. Локальное приближение управляемой системы другой, более простой системой, широко используется в теории управления. Обычно в качестве локальной аппроксимации используется линеаризация управляемой системы. Однако для линейных по управлению систем вида (1.1) линеаризация дает слишком грубое приближение. Так как размерность управления меньше размерности состояния, то линеаризация не может быть вполне управляемой. Естественную замену линейной аппроксимации в этом случае доставляет нильпотентная аппроксимация — наиболее простая система, сохраняющая структуру управляемости исходной системы (в частности, сохраняется такой важный инвариант как вектор роста). Идея метода заключается в том, что исходная нелинейная система заменяется приближенной нильпотентной системой, для которой точно решается задача управления. Затем найденные управления подставляются в исходную систему. Если состояние, достигнутое после применения найденного управления, отличается от желаемого состояния в пределах допустимой погрешности, то задача считается решенной, иначе процедура повторяется с новыми граничными условиями: в качестве начального состояния  $x_0$  используется состояние, достигнутое на предыдущей итерации алгоритма, а конечное состояние  $x_1$  остается неизменным. Нильпотентная система локально приближает исходную, поэтому начальное и конечное состояние системы не должны существенно отличаться, то есть для евклидова расстояния  $\rho(x_0, x_1) = \sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_0^i - x_1^i)^2}$  должно быть выполнено условие  $\rho(x_0, x_1) \leq R$ , где  $R$  — достаточно малое число, величина которого зависит от конкретного вида системы (1.1) и от используемого класса управлений. Возникает задача определения величины радиуса сходимости алгоритма  $R$  для конкретных управляемых систем.

В описанной процедуре возникает задача управления нильпотентной системой, которая должна решаться точно. Идет работа по

созданию модуля, решающего задачу для управлений из разных классов функций: кусочно-постоянное, тригонометрическое ( $u_i = \alpha_i + \beta_i \sin 2\pi t + \gamma_i \cos 2\pi t$ ,  $i = 1, 2$ ) и оптимальное управление (в смысле функционала субримановой длины  $\int_0^T \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min$ ). Возможны и другие классы функций. В настоящее время в программной среде „Mathematica“ [5] реализовано:

- построение нильпотентной аппроксимации и вычисление замены координат для перевода системы в канонический вид,
- решение задачи управление в классе кусочно-постоянных управлений для канонической нильпотентной системы,
- решение исходной нелинейной задачи на основе нильпотентной аппроксимации с заданной точностью,
- вычисление траектории системы с известными управлениями,
- построение графика проекции траектории на координатные оси.

Алгоритм управления, основанный на построении нильпотентной аппроксимации был применен к системам „шар на плоскости“ и „машина с двумя прицепами“. В системе „Mathematica“ написана программа, визуализирующая качение шара из заданного начального состояния в заданное конечное состояние.

## 2. Алгоритм построения нильпотентной аппроксимации

В общем случае процедура построения нильпотентной аппроксимации применяется к системам вида

$$(2.1) \quad \dot{x} = \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где  $g_1, \dots, g_m$  — гладкие векторные поля в  $\mathbb{R}^n$ , а вектор управления  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$  принимает значения из  $\mathbb{R}^m$ . Понятие нильпотентной аппроксимации управляемой системы было введено независимо А. А. Аграчевым и А. В. Сарычевым [6], и Х. Хермсом [7]. Далее описан алгоритм вычисления нильпотентной аппроксимации, предложенный А. Беллаишем [8]; используется изложение М. Вендиттелли и соавторов [9].

Для точки  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , обозначим  $\eta$  траекторию системы (2.1), выходящую из точки  $x_0$  под действием управления  $u(t)$ ,  $t \in [0, T]$ . Определим её субриманову длину:

$$(2.2) \quad \text{length}(\eta) = \int_0^T \sqrt{u_1^2(t) + \dots + u_m^2(t)} dt.$$

Точка  $x = \eta(t_0) \in \mathbb{R}^n$ , для фиксированного  $t_0 \in [0, T]$ , называется достижимой из  $x_0$ . Система (2.1) индуцирует субриманово расстояние в  $\mathbb{R}^n$ , определяемое как

$$(2.3) \quad d(x_1, x_2) = \inf_{\eta} \text{length}(\eta),$$

где инфимум берется по всем траекториям  $\eta$ , соединяющим  $x_1$  с  $x_2$ . Теорема Рашевского–Чжоу [1] утверждает, что любые две точки  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$  достижимы друг из друга ( $d(x_1, x_2) < \infty$ ), если в любой точке  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  линейная оболочка элементов алгебры Ли  $Lie(g_1, \dots, g_m)$ , порожденной полями  $g_i$ , совпадает с касательным пространством  $T_{x_0}M$  (условие полного ранга). Предполагается, что система (2.1) удовлетворяет условию полного ранга, то есть вполне управляема.

Возьмем  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  и обозначим через  $L^s(x_0)$  векторное пространство, порождаемое значениями в точке  $x_0$  скобок Ли полей  $g_1, \dots, g_m$  длины  $\leq s$ ,  $s = 1, 2, \dots$  (сами поля  $g_i$  — скобки длины 1):

$$\begin{aligned} L^1(x_0) &= \text{span}\{g_i(x_0) | i = 1, \dots, m\}, \\ L^2(x_0) &= \text{span}(L^1(x_0) + \{[g_i, g_j](x_0) | i, j = 1, \dots, m\}), \\ &\dots \\ L^s(x_0) &= \text{span}(L^{s-1}(x_0) + \\ &+ \{[g_{i_s}, [g_{i_{s-1}}, \dots [g_{i_2}, g_{i_1}] \dots]](x_0) | i_1, \dots, i_s \in \{1, \dots, m\}\}). \end{aligned}$$

Условие полного ранга гарантирует, что для любой точки  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  существует наименьшее целое число  $r = r(x_0)$  такое, что  $\dim L^r(x_0) = n$ . Пусть  $n_s(x_0) = \dim L^s(x_0)$ ,  $s = 1, \dots, r$ .

*Вектором роста* системы (2.1) в точке  $x_0$  называется вектор

$$(n_1(x_0), \dots, n_r(x_0)).$$

Точка  $x_0$  называется *регулярной*, если вектор роста постоянен в окрестности точки  $x_0$ , иначе  $x_0$  называется *сингулярной*. Далее будем предполагать, что все точки системы (2.1) регулярные.

Управляемая система (2.1) называется *нильпотентной*, если соответствующая алгебра Ли  $Lie(g_1, \dots, g_m)$  нильпотентна, то есть для некоторого  $N \in \mathbb{N}$

$$[g_{i_1}, [g_{i_2}, \dots, [g_{i_N}, g_{i_{N+1}}] \dots]] = 0, \quad \forall i_1, \dots, i_{N+1} \in \{1, \dots, m\}.$$

### 2.1. Нильпотентная аппроксимация в привилегированных координатах

Рассмотрим систему (2.1), аппроксимируемую в точке  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Алгоритм для вычисления привилегированных координат и построения нильпотентной аппроксимации в точке  $x_0$  выглядит следующим образом (согласно работе М. Вендителли и соавторов [9]):

- (1) Вычисление вектора роста  $(n_1, \dots, n_r)$  и весов  $w_1, \dots, w_n$  в точке  $x_0$ . Веса определяются из условия  $w_j = s$ , если

$$n_{s-1} < j \leq n_s,$$

где  $n_s = n_s(x_0)$  и  $n_0 = 0$ .

- (2) Выбор векторных полей  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  таких, что их значения в точке  $x_0$  образуют базис в касательном пространстве

$$L^r(x_0) = T_{x_0} \mathbb{R}^n$$

и для них выполнено включение

$$\gamma_{n_{s-1}+1}(x), \dots, \gamma_{n_s}(x) \in L^s(x), \quad s = 1, \dots, r,$$

для любой точки  $x$  в окрестности точки  $x_0$ .

- (3) Используя исходные координаты  $x$ , вычисляем координаты  $y$  следующим образом:

$$(2.4) \quad \alpha : y = \Gamma^{(-1)}(x - x_0),$$

где  $\Gamma$  — это матрица размерности  $n \times n$ , составленная из элементов  $\Gamma_{ij}$ , определяемых по формуле:

$$\gamma_j(x_0) = \sum_{i=1}^n \Gamma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{x_0}.$$

- (4) Строим привилегированные координаты  $z = (z_1, \dots, z_n)$  в точке  $x_0$  по рекуррентной формуле:

$$\lambda : z_j = y_j + \sum_{k=2}^{w_j-1} h_k(y_1, \dots, y_{j-1}), \quad j = 1, \dots, n,$$

где

$$h_k(y_1, \dots, y_{j-1}) = - \sum_{\substack{|\alpha| = k \\ w(\alpha) < w_j}} m_j \gamma_1^{\alpha_1} \dots \gamma_{j-1}^{\alpha_{j-1}} (y_j + \sum_{q=2}^{k-1} h_q)(x_0),$$

где  $m_j = \prod_{i=1}^{j-1} y_i^{\alpha_i} / \alpha_i!$  и  $|\alpha| = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i$ .

Здесь и далее  $\gamma_i f$  обозначает производную функции  $f$  по направлению векторного поля  $\gamma_i$ ,  $\gamma_j \gamma_i f$  — производную второго порядка по направлению полей  $\gamma_i$ ,  $\gamma_j$ , и т. д.

- (5) Выразим динамику исходной системы в привилегированных координатах:

$$\dot{z} = \sum_{i=1}^m g_i(z) u_i.$$

- (6) Разложим в ряд Маклорена векторные поля  $g(z)$  и сгруппируем вместе поля одного веса:

$$g_i(z) = g_i^{(-1)}(z) + g_i^{(0)}(z) + g_i^{(1)}(z) + \dots,$$

где  $g_i^{(s)}$  — поле веса  $s$ . Вес полиномиального векторного поля  $z^\alpha \frac{\partial}{\partial z_j}$  есть  $w(\alpha) - w_j$ , где вес монома  $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$  есть  $w(\alpha) = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n$ .

- (7) Обозначим  $\hat{g}_i(z) = g_i^{(-1)}(z)$  и определим аппроксимирующую систему

$$\dot{z}_j = \sum_{i=1}^m \hat{g}_{ij}(z_1, \dots, z_{j-1}) u_i, \quad j = 1, \dots, n,$$

где  $\hat{g}_{ij}$  есть однородный полином веса  $w_j - 1$ .

Так выглядит общий алгоритм построения нильпотентной аппроксимации в привилегированных координатах.

## 2.2. Аппроксимация систем с вектором роста (2, 3, 5)

Мы будем рассматривать системы в пространстве  $\mathbb{R}^5$ , всюду имеющие постоянный вектор роста (2, 3, 5):

$$(2.5) \quad \dot{x} = X_1(x)u_1 + X_2(x)u_2, \quad x \in \mathbb{R}^5, \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2.$$

То есть предполагается, что в любой точке  $x \in \mathbb{R}^5$  векторные поля  $X_1, X_2, X_3 = [X_1, X_2], X_4 = [X_1, X_3], X_5 = [X_2, X_3]$  линейно независимы. Известно, что система вида (2.5) общего положения имеет вектор роста (2, 3, 5) в точке общего положения.

Рассмотрим процедуру построения нильпотентной аппроксимации для таких систем в произвольной точке  $x_0 \in \mathbb{R}^5$ . Это конкретизация общего алгоритма п. 2.1 для систем вида (2.5).

- (1) Используя скобку Ли, построим следующие векторные поля:

$$X_3 = [X_1, X_2], \quad X_4 = [X_1, X_3], \quad X_5 = [X_2, X_3].$$

Веса полей  $X_1, \dots, X_5$  соответственно равны  $(1, 1, 2, 3, 3)$ .

- (2) В качестве векторных полей  $\gamma_i$  возьмем поля  $X_i$ . Для них выполняются все условия, наложенные на  $\gamma_i$ .
- (3) Вычислим координаты  $y_i$  по формуле (2.4). При такой замене точка  $x_0$  переходит в начало координат.
- (4) Выполним переход в привилегированные координаты с помощью замены:

$$\begin{aligned} z_i &= y_i, \quad i = 1, \dots, 3, \\ z_4 &= y_4 - \frac{1}{2}(y_1^2\sigma_1 + 2y_1y_2\sigma_2 + y_2^2\sigma_3), \\ z_5 &= y_5 - \frac{1}{2}(y_1^2\sigma_4 + 2y_1y_2\sigma_5 + y_2^2\sigma_6), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= X_1(X_1(y_4))(x_0), \quad \sigma_2 = X_1(X_2(y_4))(x_0), \quad \sigma_3 = X_2(X_2(y_4))(x_0), \\ \sigma_4 &= X_1(X_1(y_5))(x_0), \quad \sigma_5 = X_1(X_2(y_5))(x_0), \quad \sigma_6 = X_2(X_2(y_6))(x_0). \end{aligned}$$

- (5) Используя разложение векторных полей в ряд Маклорена, построим нильпотентную аппроксимацию

$$(2.6) \quad \dot{z} = \hat{X}_1(z)u_1 + \hat{X}_2(z)u_2, \quad z \in \mathbb{R}^5, \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2,$$

где

$$\begin{aligned} \hat{X}_j(z) &= X_j^1(0) \frac{\partial}{\partial z_1} + X_j^2(0) \frac{\partial}{\partial z_2} + \left( \sum_{i=1}^2 \frac{\partial X_j^3(z)}{\partial z_i} \Big|_{z=0} z_i \right) \frac{\partial}{\partial z_3} + \\ &+ \left( \frac{\partial X_j^4(z)}{\partial z_3} \Big|_{z=0} z_3 + \frac{\partial^2(X_i^4(z))}{\partial z_1^2} \Big|_{z=0} z_1^2 + \frac{\partial^2(X_i^4(z))}{\partial z_2^2} \Big|_{z=0} z_2^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2(X_i^4(z))}{\partial z_1 \partial z_2} \Big|_{z=0} z_1 z_2 \right) \frac{\partial}{\partial z_4} + \\ &+ \left( \frac{\partial X_j^5(z)}{\partial z_3} \Big|_{z=0} z_3 + \frac{\partial^2(X_i^5(z))}{\partial z_1^2} \Big|_{z=0} z_1^2 + \frac{\partial^2(X_i^5(z))}{\partial z_2^2} \Big|_{z=0} z_2^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2(X_i^5(z))}{\partial z_1 \partial z_2} \Big|_{z=0} z_1 z_2 \right) \frac{\partial}{\partial z_5}, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

(6) Далее, введем систему координат, в которых система (2.6) имеет канонический вид:

$$(2.7) \quad \begin{cases} \dot{x} &= u_1, \\ \dot{y} &= u_2, \\ \dot{z} &= \frac{1}{2}(xu_2 - yu_1), \\ \dot{v} &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2)u_2, \\ \dot{w} &= -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)u_1. \end{cases}$$

Каноническая система является нильпотентной и имеет вектор роста  $(2, 3, 5)$ .

Известно [10], что любые две пятимерные нильпотентные системы с вектором роста  $(2, 3, 5)$  диффеоморфны. Замена переменных, переводящая одну такую систему в другую, строится следующим образом.

Пусть  $X_1, X_2$  — векторные поля первой, а  $Y_1, Y_2$  — векторные поля второй нильпотентной системы с вектором роста  $(2, 3, 5)$ . Вычислим поля  $X_3, X_4, X_5$  и  $Y_3, Y_4, Y_5$  в соответствии с пунктом 1. Построим диффеоморфизм, переводящий поля  $X_i$  в окрестности точки  $x_0$  в поля  $Y_i$  в окрестности  $y_0$ :

$$\Phi : O(x_0) \rightarrow O(y_0), \quad \Phi_*(X_i) = Y_i.$$

Определим отображения  $F$  и  $G$ , как композицию потоков векторных полей  $X_i$  и  $Y_i$  соответственно за время  $t_i$

$$F(t_1, \dots, t_5) = e^{t_5 X_5} \circ \dots \circ e^{t_1 X_1}(x_0),$$

$$G(t_1, \dots, t_5) = e^{t_5 Y_5} \circ \dots \circ e^{t_1 Y_1}(y_0).$$

Тогда искомым диффеоморфизм имеет вид

$$\Phi = G \circ F^{-1}.$$

Итак, мы имеем способ задания диффеоморфизма, переводящего поля исходной системы  $X_i$  из окрестности точки  $x_0$  в поля системы  $Y_i$  в окрестности начала координат, нильпотентная аппроксимация которой является канонической системой:

$$\tau = \Phi \circ \lambda \circ \alpha.$$



### 3. Решение задачи управления на основе нильпотентной аппроксимации

Рассмотрим задачу управления (1.1). Перепараметризуем время так, чтобы конечный момент времени  $T = 1$ . Будем искать управления  $u_1(t), u_2(t)$  в классе кусочно-постоянных функций. Для этого построим нильпотентную аппроксимацию в окрестности конечного состояния  $x_1$ . Решим задачу управления для нильпотентной системы. Найденное управление подставим в исходную систему. Если достигнутое состояние  $x(1)$  отличается от финального  $x_1$  с допустимой погрешностью, то вычисления прекращаются, иначе снова запускается алгоритм поиска управления, где в качестве начального состояния  $x_0$  используется состояние  $x(1)$ , достигнутое на предыдущей итерации алгоритма. Отметим, что при этом не надо повторно строить нильпотентную аппроксимацию в точке  $x_1$ . После достижения требуемой точности окончательный закон управления формируется путем конкатенации найденных на каждой итерации алгоритма управлений. Затем время перепараметризуется таким образом, что окончательный момент времени  $T = 1$ . Временной отрезок  $[0, 1]$  делится равномерно на  $k$  частей, где  $k$  — число итераций, совершенных алгоритмом. Получаем кусочно-постоянные управления с  $4k$  интервалами постоянства.

#### 3.1. Управление канонической нильпотентной системой

В описанном алгоритме возникает необходимость уметь решать задачу управления для канонической системы (2.7). Требуется найти управления  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  в классе кусочно-постоянных функций на отрезке  $[0, 1]$  такие, что для произвольной точки  $x_0 \in \mathbb{R}^5$  соответствующая траектория удовлетворяет условиям:  $\mathbf{x}(0) = x_0, \mathbf{x}(1) = \vec{0}$ .

**Утверждение.** Для решения задачи достаточно управлений с тремя точками переключения:

$$u_i = \begin{cases} \alpha_i, & \text{при } t \in [0, \frac{1}{4}], \\ \beta_i, & \text{при } t \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \\ \gamma_i, & \text{при } t \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], \\ \delta_i, & \text{при } t \in (\frac{3}{4}, 1], \end{cases}$$

где  $i = 1, 2$ .

Требуется определить коэффициенты управления

$$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i.$$

Для этого решается система из пяти алгебраических уравнений с восемью неизвестными:

$$\begin{cases} x(\alpha_i, \dots, \delta_i) = 0, \\ y(\alpha_i, \dots, \delta_i) = 0, \\ z(\alpha_i, \dots, \delta_i) = 0, \\ v(\alpha_i, \dots, \delta_i) = 0, \\ w(\alpha_i, \dots, \delta_i) = 0. \end{cases}$$

Получается трехпараметрическое семейство решений. Формулы имеют сложный вид, поэтому в статье не приводятся. Они выложены в файле <ftp://univ.u.pereslavl.ru/upload/masht/CanonSolve.nb>. Для любого начального состояния  $x_0$  существует способ зафиксировать свободные параметры так, чтобы получалось решение без особенностей. Кроме того, хотелось бы получить управления такие, что длина соответствующей траектории была как можно меньше. В зависимости от того, какие коэффициенты выбираются в качестве свободных параметров, получаются различные формулы для оставшихся коэффициентов управления. В качестве свободных параметров выбираются  $\gamma_1, \delta_1, \delta_2$  или  $\gamma_2, \delta_1, \delta_2$ . Остальные коэффициенты управления выражаются через свободные параметры. Введем критерий  $Q_1 = \max(|\alpha_i|, |\beta_i|, |\gamma_i|, |\delta_i|)$ . Будем искать значения свободных параметров, соответствующее минимальному значению  $Q_1$ .

В системе „Mathematica“ [5] написана программа, определяющая коэффициенты управления из условия минимальности  $Q_1$ . В итоге, получаем кусочно-постоянные управления, переводящие систему (2.7) из состояния  $x_0$  в начало координат, для которых выполнено:

$$\max |u_i| \rightarrow \min.$$

Таким образом, мы умеем решать задачу управления для канонической системы и получать приближенное решение исходной системы, используя найденное управление.

#### 4. Задача о качении шара по плоскости

Алгоритм и компьютерная программа в системе „Mathematica“ приближенного решения задачи управления для систем вида (2.5) были применены и протестированы на двух важных прикладных задачах: о качении шара по плоскости и о движении машины с двумя прицепами. В этом пункте рассматривается первая из этих задач.

Система, моделирующая качение шара по плоскости без прокручивания и проскальзывания, описывается уравнениями вида [11]

$$\dot{Q} = u_1 X_1(Q) + u_2 X_2(Q), \quad Q = (x, y, q_0, q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^2 \times S^3,$$

где  $S^3 = \{q = (q_0, q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^4 \mid q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1\}$ .

Можно свести её к пятимерной системе, если использовать для задания ориентации мнимую часть кватерниона

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k, \quad q \in S^3,$$

задающего вращение. Если шар не совершает больших поворотов ( $q_0 > 0$ ), то траектория  $q(t)$  описывается своей проекцией с трехмерной сферы  $S^3$  на трехмерный шар  $\sum_{i=1}^3 q_i^2 < 1$ . Тогда

$$q_0 = \sqrt{1 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2},$$

и пятимерная система имеет вид:

$$(4.1) \quad \begin{cases} \dot{x} &= u_1, \\ \dot{y} &= u_2, \\ \dot{q}_1 &= \frac{1}{2}(q_3 u_1 + \sqrt{1 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2} u_2), \\ \dot{q}_2 &= \frac{1}{2}(-\sqrt{1 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2} u_1 + q_3 u_2), \\ \dot{q}_3 &= \frac{1}{2}(-q_1 u_1 - q_2 u_2). \end{cases}$$

Эта система корректна лишь в том случае, когда кватернион вращения лежит на верхней полусфере в  $S^3$ . Предположительно существует окрестность конечной точки  $O(Q_i^f) = |Q_i^0 - Q_i^f| < R$ ,  $i = 1 \dots 5$ , для любой точки из которой, выбираемой в качестве начальной, алгоритм сходится. Заметим, что теоретически такая сходимость алгоритма гарантирована, если для используемого класса управлений  $U$  выполнено следующее топологическое свойство, которое естественно назвать локальной управляемостью системы (1.1) в классе управлений  $U$ : для любой точки  $Q^1 \in Q$  и для любой ее окрестности  $O_1 \subset Q$  существует такая окрестность  $O_2 \subset O_1$  точки  $Q^1$ , что для любой точки  $Q^0 \in O_2$  существует управление  $u(\cdot) \in U$ , переводящее точку  $Q^0$  в  $Q^1$ , причем соответствующая траектория  $Q(\cdot)$  системы (1.1) содержится в окрестности  $O_1$ . Из непрерывности субриманова расстояния (2.3) следует, что класс управлений, оптимальных в смысле минимума функционала субримановой длины (2.2), этому свойству удовлетворяет. Для класса кусочно-постоянных управлений априори это свойство не выполняется. Этот вопрос подлежит изучению.

Проводилось обширное тестирование, которое подтвердило предположение о сходимости алгоритма в шаре радиуса  $R = 10^{-2}$ . Кроме того, алгоритм сходится на множестве, находящемся вне этого шара. Это множество — объект исследования.

На рис. 1 приведен график траекторий (в отклонениях от конечного состояния) для начального состояния шара  $\mathbf{x}_0$  и конечного состояния  $\mathbf{x}_1$ , где

$$\mathbf{x}_0 = \left(-\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{5}, 0, -\frac{1}{5}\right), \quad \mathbf{x}_1 = \left(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right),$$

с точностью  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Для достижения нужной точности алгоритм совершил 4 итерации. Фильм, визуализирующий качение шара на приведенном примере выложен в файле <ftp://univ.u.pereslavl.ru/upload/masht/SphereMov.avi>.

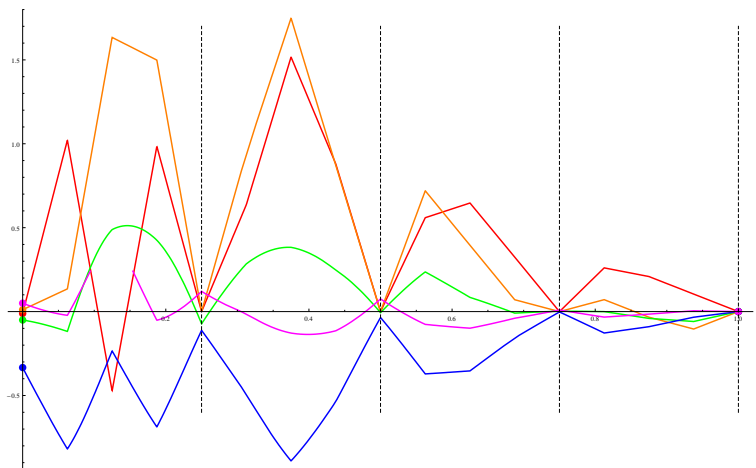


Рис. 1. Траектории системы „шар на плоскости“ (в отклонениях)

## 5. Машина с двумя прицепами

Рассмотрим задачу управления машиной с двумя прицепами. Положение машины на плоскости определяется тремя координатами

$x, y, \theta$ , где  $x, y$  — координаты на плоскости, а  $\theta$  — угол, задающий ориентацию машины. Положение прицепов определяется двумя углами  $\phi_1$  и  $\phi_2$ . Динамика системы имеет вид:

$$(5.1) \quad \begin{cases} \dot{x} &= \cos \theta u_1, \\ \dot{y} &= \sin \theta u_1, \\ \dot{\theta} &= u_2, \\ \dot{\phi}_1 &= -\sin \phi_1 u_1 + (-1 - \cos \phi_1) u_2, \\ \dot{\phi}_2 &= (\sin(\phi_1 - \phi_2) + \sin \phi_1) u_1 + (\cos(\phi_1 - \phi_2) + \cos \phi_1) u_2. \end{cases}$$

Это — система вида (2.5), где поля  $X_1$  и  $X_2$  имеют вид:

$$\begin{aligned} X_1 &= \{ \cos \theta, \sin \theta, 0, -\sin \phi_1, \sin(\phi_1 - \phi_2) + \sin \phi_1 \}, \\ X_2 &= \{ 0, 0, 1, -1 - \cos \phi_1, \cos(\phi_1 - \phi_2) + \cos \phi_1 \}. \end{aligned}$$

Заметим, что система (5.1) не управляема, если  $\phi_1 = \pi$  или  $\phi_2 = \pi$ . В дальнейшем будем рассматривать пространство состояний системы  $\mathbb{R}^2 \times S^1 \times (S^1 - \{\pi\})^2$ . Вычислим коммутаторы  $X_3 = [X_1, X_2]$ ,  $X_4 = [X_1, X_3]$ ,  $X_5 = [X_2, X_3]$ . Векторные поля  $X_i, i = 1, \dots, 5$ , линейно независимы всюду, кроме особых поверхностей  $\phi_1 = \phi_2$ . Точки этих поверхностей являются сингулярными. Будем решать задачу управления системой (5.1) из начального состояния  $x_0$  в конечное состояние  $x_1$ , где  $x_0$  и  $x_1$  не принадлежат особым поверхностям. Применим алгоритм управления, основанный на построении нильпотентной аппроксимации. Тестирование показало сходимость алгоритма в круге радиуса  $R = 10^{-4}$ . На рис. 2 приведен график траекторий (в отклонениях от конечного состояния) для начального состояния системы  $\mathbf{x}_0$  и конечного состояния  $\mathbf{x}_1$ , где

$$\mathbf{x}_0 = (-1, 0, 0.91, 2, -0.955), \quad \mathbf{x}_1 = (-1, 0, 0.9055, 2, -1),$$

с точностью  $\varepsilon = 10^{-5}$ . Для достижения нужной точности алгоритм совершил 10 итераций.

## 6. Заключение

В работе был рассмотрен способ управления нелинейными пятимерными системами, линейно зависящими от управления, основанный на построении нильпотентной аппроксимации. Изложен метод построения нильпотентной аппроксимации и алгоритм решения задачи управления, основанный на этом методе. Приведено решение задачи управления канонической нильпотентной системой в классе

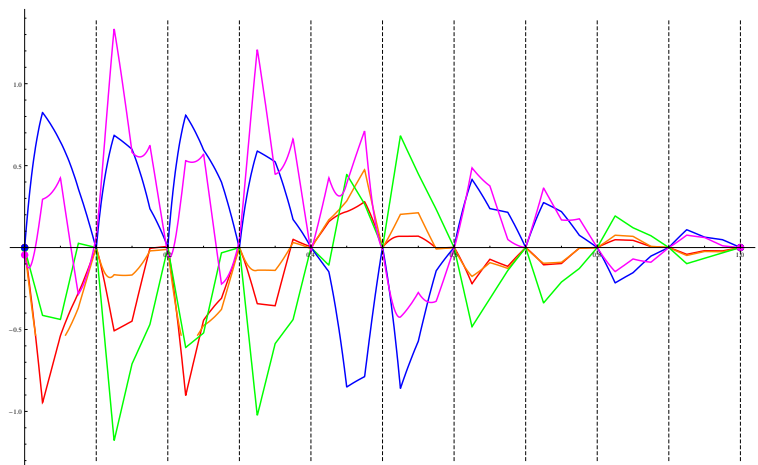


Рис. 2. Траектории системы „машина на плоскости“  
(в отклонениях)

кусочно-постоянных управлений. В системе „Mathematica“ реализован модуль, решающий задачу управления на основе нильпотентной аппроксимации. Проведено тестирование модуля на управляемой системе “шар на плоскости” и „машина с двумя прицепами“.

В дальнейших планах стоит реализация решения задачи управления в других классах функций: тригонометрическое и оптимальное управление.

### Список литературы

- [1] Аграчёв А. А., Сачков Ю. Л. Геометрическая теория управления. — М.: Физматлит, 2005. — 391 с. ↑1, 2
- [2] Laumond J. P. // Lecture Notes in Control and Information Science, № 229: Springer, 1998, с. 343. ↑1
- [3] Murray R.M., Sastry S.S. *Steering controllable systems* // Proc. 29th IEEE Conf. Dec. and Control. — Honolulu, Hawaii, 1990, с. 408—412. ↑
- [4] Fliess M., Levine J., Martin P., Rouchon P. *On differential flat nonlinear systems* // Proc. IFAC NOLCOS Symposium. — Bordeaux, France, 1992, с. 408—412. ↑1

- [5] Wolfram S. *Mathematica: a system for doing mathematics by computer.* — Redwood City, CA USA: Addison–Wesley, 1991. — 961 с. ↑1, 3.1
- [6] Аграчев А. А., Сарычев А.В. Фильтрация алгебры Ли векторных полей и нильпотентная аппроксимация управляемых систем. — Т. 295: ДАН СССР, 1987. — 777–781 с. ↑2
- [7] Hermes H. Nilpotent and high-order approximations of vector fields systems. — Т. 33, 2, 1991. — 238–264 с. ↑2
- [8] Bellaïche A. *The tangent space in sub-Riemannian geometry.* — Basel, Switzerland: Birkhäuser, 1996. — 1–78 с. ↑2
- [9] Venditelli M., Oriolo G., Jean F., Laumond J.–P. Nonhomogeneous nilpotent approximations for nonholonomic systems with singularities // *Transactions on Automatic Control.* — Т. 49: IEEE Control Systems Society, 2004. — 261–266 с. ↑2, 2.1
- [10] Sachkov Yu.L. Symmetries of Flat Rank Two Distributions and Sub-Riemannian Structures // *Transactions of the American Mathematical Society.* — Т. 256, 2004. — 457–494 с. ↑2.2
- [11] Маштаков А. П. Управление ориентацией сферы, катящейся по плоскости // *Материалы XII научной студенческой конференции университета города Переславля им. А. К. Айламазяна.* — г. Переславль-Залесский, 2007. ↑4

A. P. Mashtakov. *Approximate solution to control problem for nonlinear five-dimensional systems via nilpotent approximation* // *Proceedings of Junior research and development conference of Ailamazyan Pereslavl university.* — Pereslavl, 2009. — p. 117–131. (*in Russian*).

ABSTRACT. The control problem for nonlinear five-dimensional systems with two-dimensional input vector is studied. Algorithm of construction nilpotent approximation is presented. Control problem for canonical nilpotent system is solved in class of piecewise constant controls. The control procedure is illustrated on the system describing rolling of a ball on a plane and on the two-trailer system.