

О. В. Фесько

Оптимизация динамических систем на множестве кусочно-постоянных управлений

Научный руководитель: к.ф.-м.н. Е. А. Трушкова

Аннотация. Рассмотрен метод решения задачи оптимального управления на множестве кусочно-постоянных управлений. Эта задача сведена к конечномерной задаче минимизации функции многих переменных. Построены соответствующие алгоритмы, которые в последовательной версии реализованы на языке C++, а в параллельной — на T++.

1. Введение

Будем рассматривать задачи оптимального управления процессами, которые описываются системами дифференциальных уравнений. Подобные задачи имеют многочисленные приложения в механике космического полета, в вопросах управления химическими или ядерными реакторами и т. д. [1].

При исследовании различных динамических систем с управлением большое значение имеет поиск простых оптимальных законов управления, реализуемых на практике. Настоящая работа посвящена поиску решения задачи оптимального управления в виде кусочно-постоянной функции.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу оптимального управления для системы

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & t \in [t_0, t_1], \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $x_l(t)$, $l = \overline{1, n}$ — кусочно-дифференцируемы, управление $u(t)$ — кусочно-постоянно, т. е.

$$u(t) = w_i, t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), w_- \leq w_i \leq w_+, w_i \in \mathbb{R}^1, i = \overline{0, m-1},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта НОУ ИПС «Университет города Переславля» им. А. К. Айламазяна.

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m = t_1, m \geq 1, m \in \mathbb{Z},$$

с критерием качества

$$(2) \quad F(x(t_1)) \rightarrow \min.$$

Найдем условия, при которых функция F будет дифференцируема по параметрам w_i , $i = \overline{0, m-1}$. Для этого докажем две теоремы.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $x(t)$ — решение дифференциальной системы с начальным условием

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), w_1), & t \in [t_0, t_1], \\ x(t_0) = a(w_0), \end{cases}$$

где $w_1 \in \mathbb{R}^1$, $w_- \leq w_1 \leq w_+$, $w_0 \in \mathbb{R}^k$, $w_- \leq w_{0i} \leq w_+$, $i = \overline{1, k}$; функция $f(t, x, w_1)$ непрерывна по t и непрерывна вместе со своими частными производными по x и w_1 в области $D \supset [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times [w_-, w_+]$, $a(w_0)$ непрерывно дифференцируема по w_0 , тогда функция $x(t_1) = M(w_0, w_1)$ будет дифференцируема по w_0 и w_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функция $f(t, x, w_1)$ непрерывна вместе со своими частными производными по x и w_1 , то по теореме о дифференцируемости решения по начальным условиям и по теореме о дифференцируемости решения по параметрам [2] решение задачи $x(t)$ имеет производные по начальным данным $a(w_0)$ и по параметру w_1 . Так как функция $a(w_0)$ непрерывно дифференцируема по w_0 , то по теореме о дифференцировании сложной функции [3] $x(t)$ имеет производные по параметрам w_0 и w_1 . Значит, функция $x(t_1) = M(w_0, w_1)$ дифференцируема по w_0 и w_1 . \square

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $u(t) = w_i$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = \overline{0, m-1}$, $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_m = t_1$, $x(t)$ — соответствующее решение дифференциальной системы (1); функция $f(t, x, u)$ непрерывна по t и непрерывна вместе со своими частными производными по x и u в области $D \supset [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times [w_-, w_+]$; $F(x)$ дифференцируема по x , тогда $F(x(t_1)) = G(w)$, где $w = (w_0, \dots, w_{m-1})^T$, будет дифференцируема по w .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим временной отрезок $[\tau_0, \tau_1]$. Решение $x(t)$ на этом отрезке удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), w_0), \\ x(\tau_0) = x_0. \end{cases}$$

Из теоремы 2.1 следует, что функция $x(\tau_1) = \mu_1(w_0)$ дифференцируема по w_0 .

Рассмотрим следующий временной отрезок $[\tau_1, \tau_2]$. На нем функция $x(t)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), w_1), \\ x(\tau_1) = \mu_1(w_0). \end{cases}$$

Из теоремы 2.1 следует, что функция $x(\tau_2) = \mu_2(w_0, w_1)$ дифференцируема по w_0, w_1 .

Продолжая этот процесс, придем к выводу, что функция $x(t_1) = \mu(w_0, w_1, \dots, w_{m-1})$ дифференцируема по w . Так как функция $F(x)$ дифференцируема по x , то по *теореме о дифференцировании сложной функции* функция $F(x(t_1)) = G(w)$ дифференцируема по w .

□

В силу теоремы 2.2 исходная задача (1), (2) сводится к задаче условной оптимизации функции многих переменных $G(w)$ на множестве $W = \{w \in \mathbb{R}^{m-1} : w_- \leq w_i \leq w_+, i = \overline{0, m-1}\}$.

3. Вспомогательный алгоритм минимизации функции многих переменных

Для минимизации многомерной функции $G(w)$ был выбран широко применяемый градиентный метод спуска [4] с некоторыми модификациями.

Алгоритм начинается с выбора начального приближения w_0 . Опишем одну итерацию метода, считая, что приближение w_k найдено:

- (1) В точке w_k вычисляется градиент $\nabla G(w_k)$.
- (2) Вычисляется шаг α_k . Шаг можно искать по-разному. Например, путем минимизации одномерной функции:

$$\alpha_k : G_k(\alpha_k) = \arg \min_{\alpha \geq 0} G(w_k - \alpha \nabla G(w_k)).$$

В этом случае метод носит название наискорейшего спуска.

- (3) Вычисляется очередная точка

$$w_{k+1} = w_k - \alpha_k \nabla G(w_k).$$

При программной реализации этого алгоритма был учтен ряд особенностей:

- (1) **Движение из стационарной точки.** Если текущим приближением вдруг оказалась стационарная точка, т.е. точка, в которой градиент равен нулю, то для избежания остановки алгоритма не в точке локального минимума делается локальный перебор по сетке из этой точки с целью поиска в ее окрестности меньшего значения функции. Если найдено меньшее значение функции, то точка (в которой достигается наименьшее значение) принимается новым текущим приближением, и алгоритм продолжает свою работу, иначе начальное приближение, действительно, точка локального минимума, алгоритм останавливается.
- (2) **Проекция текущего приближения на допустимую область.** При вычислении новой точки возможен случай выхода за область поиска (рис. 1). Для этого точка, оказавшаяся за пределами области, возвращается на ее границу, алгоритм продолжает работу.

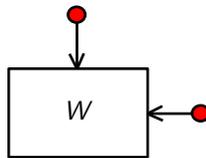


Рис. 1. Проекция точки на границу (двумерный случай)

- (3) **Условия останова.** Предложенные условия останова:
 - $|\nabla G(w_k)| \leq \varepsilon$;
 - ограничение на число выходов при вычислении очередной точки за область поиска минимума (во избежание заикливания алгоритма).

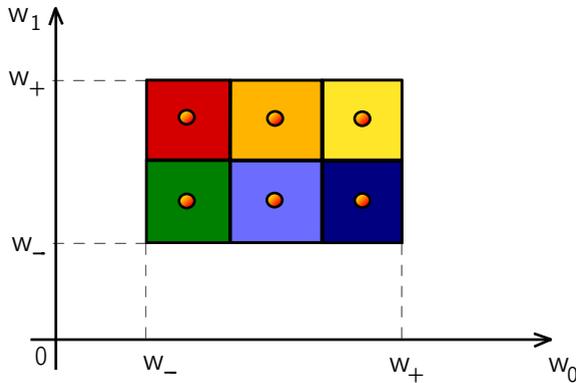


Рис. 2. Пример разбиения области (двумерный случай)

- (4) Метод ‘multistart’. Для успешного поиска всех минимумов многоэкстремальных функций вся область поиска разбивается на непересекающиеся подобласти. Во всех подобластях выбирается начальное приближение, в каждой из них запускается градиентный метод (рис. 2).

4. Схема работы программы

Для численного решения задачи Коши был реализован метод Рунге–Кутты 4-го порядка [5]. В итоге, совместно с вышеописанным алгоритмом многомерной минимизации, в общем виде схема решения задачи оптимального управления выглядит следующим образом (рис. 3):

- (1) подается некоторый начальный вектор управлений, область поиска, точность вычислений, вектор разбиений и прочие данные, собранные в файлах `in.txt` и `inRK.txt`;
- (2) при данном управлении решается задача Коши для системы дифференциальных уравнений, ищется траектория, вычисляется значение целевого функционала;
- (3) вызывается функция `grad_method` поиска нового управления до тех пор, пока не выполняются условия останова.

Программа выполняется для всех подобластей.

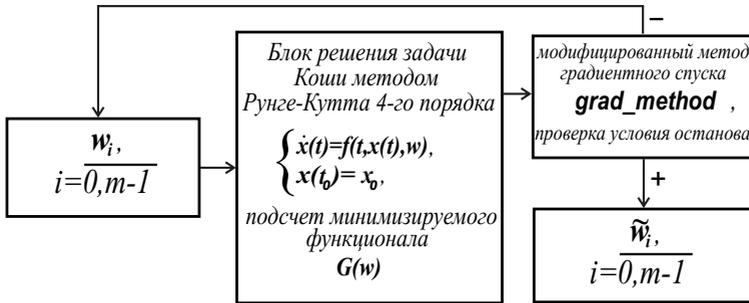


Рис. 3. Схема работы программы

5. Входные и выходные данные для программы минимизации и основной программы поиска управлений

Для модуля минимизации функции многих переменных в файле `in.txt` задаются числа:

- (1) `unsigned n`
Размерность минимизируемой функции;
- (2) `vector<vector<double> > rgn(n, vector<double> (2))`
Область изменения каждой переменной;
- (3) `double eps`
Точность вычисления результата (в условии останова);
- (4) `double epsilon`
Точность вычисления градиента;
- (5) `vector<unsigned> p(n)`
Число разбиений по каждой переменной.

В выходные файлы `out*.txt` выводятся найденные точки минимума, достигаемые в них значения функционала, значения градиентов, шаги спуска.

Для модуля решения дифференциальной системы методом Рунге-Кутты в файле `inRK.txt` задаются числа:

- (1) `unsigned m`
Размерность фазового пространства;
- (2) `vector<double> x(m)`
Начальное значение фазовой траектории;
- (3) `double t0, t1`
Начальный и конечный момент времени;

- (4) `unsigned num_t`
Число шагов по времени;
- (5) `unsigned num_upr`
Размерность пространства управлений;
- (6) `vector<double> c(num_upr)`
Число точек переключения по каждому управлению.

Выходные файлы `pathRK*.txt` содержат временные моменты и соответствующие найденным управлениям значения траекторий (в каждый момент времени).

Тестирование программы поиска минимума проводилось на многоэкстремальной модели «вулканическая поверхность» (рис. 4) (все минимумы которой были найдены уже при разбиении 10×10 в области $[-52; 52] \times [-52; 52]$), а программы поиска управлений — на ниже следующем примере.

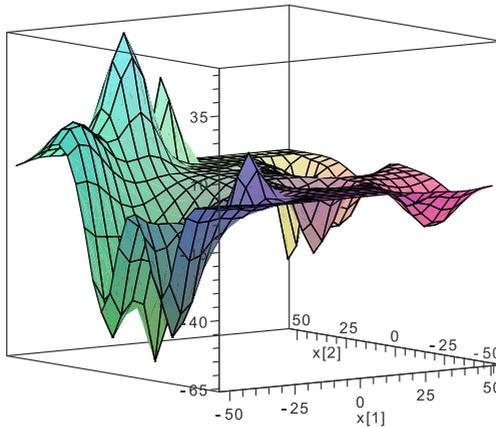


Рис. 4. Функция «вулканическая поверхность»

6. Тестовый пример

Рассмотрим задачу оптимального управления на множестве кусочно-постоянных управлений с одной и двумя точками переключения для системы

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = u(t), & t \in [0, 2], \\ \dot{x}_2(t) = u^2(t) + x_1^2(t), \\ x_1(0) = 1, & x_2(0) = 0 \end{cases}$$

с критерием качества

$$F(x(t_1)) = x_2(t_1) \rightarrow \min,$$

где $u(t) = w_i, t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$,

- а) $i = 0, 1, \tau_0 = 0, \tau_1 = 1, \tau_2 = 2$;
 б) $i = 0, 1, 2, \tau_0 = 0, \tau_1 = \frac{2}{3}, \tau_2 = \frac{4}{3}, \tau_3 = 2$.

Найдем решение системы (3), считая w_i параметрами. Тогда для задачи (3), а) решение можно записать в виде

$$x_1(t) = \begin{cases} w_0 t + 1, & t \in [0, 1), \\ 1 + w_1 t + w_0 - w_1, & t \in [1, 2], \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{3} \frac{(w_0 t + 1)^3}{w_0} + w_0^2 t - \frac{1}{3w_0}, & t \in [0, 1), \\ \frac{1}{3} \frac{(w_1 t + 1 + w_0 - w_1)^3}{w_1} + w_1^2 t + \frac{4}{3} w_0^2 + \\ + w_0 + 1 - \frac{1}{3} \frac{(w_0 + 1)^3}{w_1} - w_1^2, & t \in [1, 2]. \end{cases}$$

При этом функция $F(x)$ перепишется в виде функции от w_0, w_1 :

$$F(x(t_1)) = G(w_0, w_1) = \frac{7}{3} w_0^2 + \frac{4}{3} w_1^2 + 3w_0 + w_1 w_0 + w_1 + 2.$$

Ее минимум достигается в точке

$$\tilde{w}_0 = -\frac{63}{103} \approx -0.61116, \tilde{w}_1 = -\frac{15}{103} \approx -0.14563$$

и равен $\frac{104}{103} \approx 1.0097$.

Для задачи (3), б) решение имеет вид:

$$x_1(t) = \begin{cases} w_0 t + 1, & t \in [0, \frac{2}{3}), \\ 1 + w_1 t + \frac{2}{3} w_0 - \frac{2}{3} w_1, & t \in [\frac{2}{3}, \frac{4}{3}), \\ w_2 t + \frac{2}{3} w_1 + \frac{2}{3} w_0 - \frac{4}{3} w_2 + 1, & t \in [\frac{4}{3}, 2], \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{3} \frac{(w_0 t + 1)^3}{w_0} + w_0^2 t - \frac{1}{3w_0}, & t \in [0, \frac{2}{3}), \\ \frac{1}{81} \frac{(3w_1 t + 2w_0 + 3 - 2w_1)^3}{w_1} + w_1^2 t + \frac{62}{81} w_0^2 + \\ + \frac{4}{9} w_0 + \frac{2}{3} - \frac{1}{81} \frac{(2w_0 + 3)^3}{w_1} - \frac{2}{3} w_1^2, & t \in [\frac{2}{3}, \frac{4}{3}), \\ \frac{1}{81} \frac{(2w_0 + 3 - 4w_2 + 2w_1 + 3w_2 t)^3}{w_2} + w_2^2 t + \frac{62}{81} w_1^2 + \\ + \frac{8}{27} w_0 w_1 + \frac{4}{9} w_1 + \frac{86}{81} w_0^2 + \frac{4}{3} w_0 + \frac{4}{3} - \\ - \frac{1}{81} \frac{(2w_1 + 2w_0 + 3)^3}{w_2} - \frac{4}{3} w_2^2, & t \in [\frac{4}{3}, 2]. \end{cases}$$

При этом $F(x)$ перепишется в виде функции от w_0, w_1, w_2 :

$$F(x(t_1)) = G(w_0, w_1, w_2) = 2 + \frac{4}{9} w_2 + \frac{62}{81} w_2^2 + \frac{20}{9} w_0 + \frac{110}{81} w_0^2 + \frac{4}{3} w_1 + \frac{86}{81} w_1^2 + \frac{8}{9} w_1 w_0 + \frac{8}{27} w_2 w_1 + \frac{8}{27} w_2 w_0.$$

Минимум $F(x)$ достигается в точке

$$\tilde{w}_0 = -\frac{42921}{61039} \approx -0.70317, \tilde{w}_1 = -\frac{19575}{61039} \approx -0.32069, \tilde{w}_2 = -\frac{5625}{61039} \approx -0.09215$$

и равен $\frac{60088}{61039} \approx 0.98441$.

На рис. 5, а) и 5, б) представлены графики управлений с одной и двумя точками переключения, найденных программно (программа на C++) и теоретически (см. решение примера выше). При этом полученное программно значение критерия для задачи (3), а) — 1.0096, для задачи (3), б) — 0.9844. Дополнительно изображен график теоретически посчитанного непрерывного управления.

7. Параллельные версии программ

Программы минимизации многомерных функций и решения задачи оптимального управления были реализованы на языке T++ [6, 7], т. к. вариант программ на C++ естественным образом ориентирован на параллельные вычисления (рассылка подобластей по узлам). Вычисления проводились на суперкомпьютере семейства «СКИФ» [8] (ИПС РАН).

Для исследования эффективности программы поиска минимума было взято разбиение 8×8 для минимизации функции «вулканическая поверхность». При этом ускорение S_2 на двух узлах составило $\frac{T_1}{T_2} = \frac{1067.034}{549.503} = 1.94$. Ускорение, достигнутое при распараллеливании программы решения задачи оптимального управления для двух точек переключения (см. пример выше), равно $\frac{T_1}{T_2} = \frac{167.785}{136.976} = 1.22$. При большем числе узлов полученные данные позволяют сделать вывод об эффективном распараллеливании *данных* тестовых примеров лишь для весьма небольшого числа узлов.

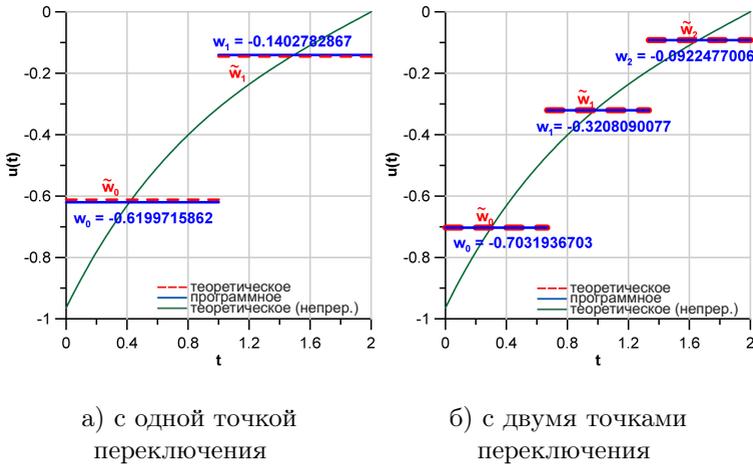


Рис. 5. Сравнение программно и теоретически найденных управлений

8. Результаты

- (1) Доказаны теоремы, позволяющие свести задачу оптимального управления на множестве кусочно-постоянных управлений к конечномерной задаче минимизации функции многих переменных.
- (2) Написана программная реализация алгоритма минимизации функции многих переменных в области на языках C++ и T++.
- (3) Написана программная реализация алгоритма оптимизации динамических систем на множестве кусочно-постоянных управлений на языках C++ и T++.
- (4) Проведено тестирование программ на конкретных примерах (программа минимизации — сложная многоэкстремальная функция типа вулканической поверхности, метод Рунге–Кутты — различной сложности динамические системы с управлением).
- (5) Решена основная задача поиска кусочно-постоянных управлений.

9. Выводы

Получившиеся результаты могут быть использованы для решения большого класса оптимизационных задач. Указанный алгоритм можно использовать при построении кусочно-постоянных приближений точных теоретических результатов и при поиске начального приближения для дальнейшего улучшения известными методами. Полученные программы будут активно использоваться в работе Исследовательского центра процессов управления и в дальнейшем войдут составной частью в программный комплекс ISCON (**I**mprovement and **S**ynthesis of **C**ontrol) [9, 10], разрабатываемый в настоящее время в Институте программных систем РАН.

Список литературы

- [1] Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. — Учеб. пособие для вузов, 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1988. — 552 с. ↑1
- [2] Трушков В. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Учебное пособие. — Переславль-Залесский: Изд-во «Университет города Переславля», 2008. — 319 с. ↑2
- [3] Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х. Математический анализ. Начальный курс. — 2-е изд., перераб. — М.: Изд-во МГУ, 1985. — 662 с. ↑2
- [4] Васильев О. В., Аргучинцев А. В. Методы оптимизации в задачах и упражнениях. — Учебное пособие. — М.: Физматлит, 1999. — 208 с. ↑3
- [5] Ильина В. А., Силаев П. К. Численные методы для физиков-теоретиков. II. — Учебное издание. — Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. — 118 с. ↑4
- [6] Абрамов С. М., Загорский И. М., Коваленко М. Р., Матвеев Г. А., Рогонов В. А. *Миграция от MPI к платформе OpenTS: эксперимент с приложениями PovRay и ALCMD*. // Международная конференция «Программные системы: теория и приложения». — М.: Наука. Физматлит, 2006, с. 265–275. ↑7
- [7] Абрамов С. М. ., Кузнецов А. А. *Кроссплатформенная версия T-системы с открытой архитектурой* // Труды международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2007)». — Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007, с. 115–121. ↑7
- [8] Суперкомпьютерная программа «СКИФ», <http://skif.pereslavl.ru>. ↑7
- [9] Коваленко М. Р., Матвеев Г. А., Осипов В. И., Трушкова Е. А. *Параллельный алгоритм улучшения управления* // Труды четвертой международной конференции «Параллельные вычисления и задачи управления» (РАСО'2008). — М.: Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, 2008. — ISBN 978-5-91450-016-7, с. 979–984. ↑9

- [10] Бельшев Д. В., Блинов А. О., Фраленко В. П. *Параллельный алгоритм аппроксимации моделей управляемых систем* // Труды четвертой международной конференции «Параллельные вычисления и задачи управления» (РАСО'2008). — М.: Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, 2008. — ISBN 978-5-91450-016-7, с. 968–978. ↑9

О. V. Fesko. *Optimization of dynamical systems in the set of piecewise constant controls* // Proceedings of Junior research and development conference of Ailamazyan Pereslavl university. — Pereslavl, 2009. — p. 206–217. (*in Russian*).

ABSTRACT. The method of optimal control problem solution in the set of piecewise constant controls is considered. This problem has been reduced to finite-dimensional problem of multidimensional function minimization. Corresponding algorithms have been formulated and implemented in C++ (sequential version) and T++ (parallel version).