

А. Ю. Вахрина

## Математическая модель ресурсообмена в замкнутой экономической системе

Научный руководитель: к.т.н. С. А. Амелькин

Аннотация. Описан процесс ресурсообмена в замкнутой экономической системе, состоящей из двух экономических агентов. Рассмотрены условия общего равновесия с учетом и без учета времени. Для каждого из случаев построена диаграмма Эджуорта. Как пример процесса ресурсообмена с учетом времени приведено описание торгов на интернет аукционе eBay.com.

### 1. Введение

Микроэкономика рассматривает взаимодействие отдельных экономических агентов (ЭА). К ним относятся потребители, работники, инвесторы, землевладельцы, фирмы — фактически любой индивидум или хозяйствующий субъект, который играет какую-либо роль в функционировании экономики.

Совокупность ЭА называется экономической системой, где каждый экономический агент является подсистемой. Главной особенностью экономических систем является «принцип добровольности», т. е. в результате обмена ресурсами каждый из агентов стремится максимизировать свое благосостояние, добровольно выбирая, какой ресурс, в каком количестве и на что обменивать [1]. ЭА не передает свой ресурс другому без какой-либо компенсации.

Экономические системы делятся на замкнутые и открытые. В открытой системе ЭА обмениваются ресурсами не только между собой, но и с окружением экономической системы, в замкнутой — такой обмен отсутствует [2].

### 2. Ресурсообмен в равновесной экономической системе

В микроэкономике процесс ресурсообмена между ЭА в замкнутой экономической системе рассматривается в теории общего равновесия. Общее экономическое равновесие определяется как такое состояние экономики, когда вся система находится в равновесии, а каждый ЭА

максимизирует свое благосостояние. Другими словами, если количество товара, которое хочет купить (или продать) один ЭА, равно тому количеству товара, которое хочет продать (или купить) другой ЭА, то после купли-продажи экономическая система окажется равновесной. В противном случае, когда возможен дальнейший взаимовыгодный ресурсообмен, система неравновесная.

### 2.1. Условия обмена

Обмен ресурсами может проходить в системе, состоящей не менее чем из двух ЭА не менее чем двумя ресурсами, один из которых выполняет функции денег: выступает как мера стоимости и средство обращения. При этом на процесс ресурсообмена накладываются следующие условия [3]:

- (1) Общее количество ресурсов в процессе обмена не изменяется, то есть они не производятся, не уничтожаются и не потребляются в ходе ресурсообмена.
- (2) Обмен заканчивается в точке равновесия, где предельные нормы замещения одного ресурса другим одинаковы для обоих ЭА.

### 2.2. Описание экономического агента

Каждый ЭА характеризуется [4, 5]:

- Функцией полезности  $U(\bar{Q})$ , где  $\bar{Q}$  — вектор запасов ресурсов. Функция  $U(\bar{Q})$  характеризует уровень жизни потребителя.
- Бюджетным ограничением, которое показывает, какое количество денег ЭА может потратить на покупку ресурсов при данном уровне цен  $(p_i)$ . Ограничение имеет следующий вид:

$$M = \sum_{i=1}^n p_i \cdot Q_i.$$

- Предельной полезностью, т. е. приростом общей полезности, имеющихся у ЭА ресурсов, при увеличении объема потребления одного из ресурсов на единицу:

$$MU(Q_i) = \frac{\partial U}{\partial Q_i}.$$

- Предельной нормой замещения:

$$MRS = \frac{MU_i}{MU_j},$$

MRS показывает, сколько единиц  $j$ -го ресурса получит ЭА в обмен на единицу  $i$ -го ресурса.

### 2.3. Диаграмма Эджуорта

Рассмотрим экономическую систему, состоящую из двух ЭА —  $A$ ,  $B$ , — и двух ресурсов. Обозначим начальный запас ресурсов у агента  $A$  через  $(Q_{1A}^0, Q_{2A}^0)$ , где  $Q_{1A}^0$  — количество первого ресурса, имеющееся у  $A$  до обмена, а  $Q_{2A}^0$  — соответственно количество второго ресурса. Тогда для агента  $B$  начальный запас представим как  $(Q_{1B}^0, Q_{2B}^0)$ .

В процессе ресурсообмена количество ресурсов у ЭА изменяется. Конечный потребительский набор  $A$  составит  $(Q_{1A}, Q_{2A})$ , где  $Q_{1A}$  и  $Q_{2A}$  — количество ресурсов, которое находится в распоряжении ЭА после обмена. Для  $B$  конечный потребительский набор —  $(Q_{1B}, Q_{2B})$ .

Общее количество каждого ресурса в ходе обмена не изменяется:

$$Q_{1A}^0 + Q_{1B}^0 = Q_{1A} + Q_{1B} = \bar{Q}_1,$$

$$Q_{2A}^0 + Q_{2B}^0 = Q_{2A} + Q_{2B} = \bar{Q}_2,$$

где  $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2$  — общее количество первого и второго ресурсов в экономической системе.

Для графического представления процесса обмена двумя ресурсами между двумя ЭА используется диаграмма Эджуорта (рис. 1). Она позволяет отобразить начальный запас и предпочтения агентов. Предпочтения описываются кривыми безразличия, т. е. линиями уровня функции полезности.

Обмен начинается в точке  $W_0$ , соответствующей начальным запасам ресурсов как у одного из ЭА, так и у другого. В ходе обмена каждый агент стремится увеличить свое благосостояние. На диаграмме Эджуорта область, в которой благосостояние обоих ЭА выше начального, ограничивается их кривыми безразличия, проходящими через точку начального запаса ресурсов  $W_0$ . Область взаимовыгодного обмена имеет форму линзы. Именно в ней происходит взаимовыгодный обмен, то есть участники обмена могут перейти в любую точку этой области, не ухудшив свое благосостояние [3, 5]. При этом цена ресурса в процессе ресурсообмена может как изменяться, так и оставаться

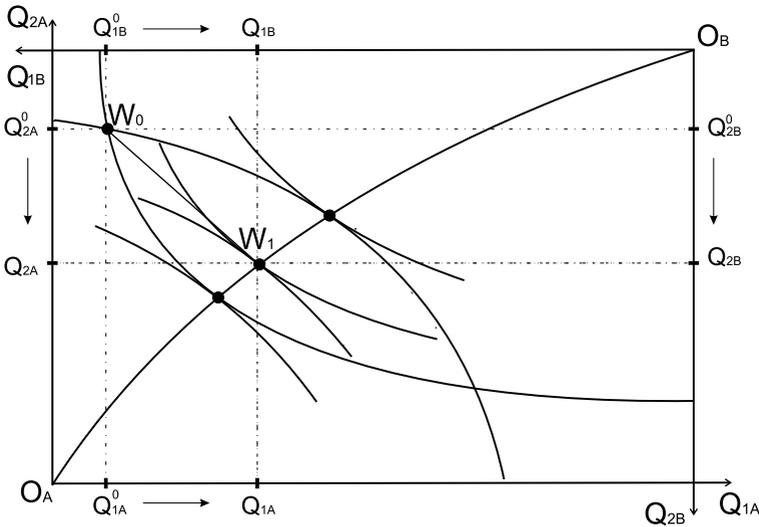


Рис. 1. Диаграмма Эджуорта

постоянной. Обмен продолжается до тех пор, пока область взаимовыгодного обмена не будет представлять точку.

Траектория, вдоль которой происходит процесс ресурсообмена, соответствует кривой бюджетного ограничения, в каждой точке которой стоимость ресурсов у ЭА в текущих ценах не изменяется.

Рассмотрим ресурсообмен при постоянных ценах на ресурсы. Обмен, перемещающий распределение ресурсов за пределы области взаимовыгодного обмена, ухудшает положение одного из ЭА, и потому не произойдет.

Склонность к обмену исчезает только тогда, когда конечное, достигнутое в ходе обмена, распределение ресурсов между ЭА окажется таким, что точка ( $W_1$ ), отображающая конечный потребительский набор на диаграмме Эджуорта, будет точкой касания кривых безразличия обоих агентов и бюджетной прямой обоих ЭА. В этой точке их  $MRS$  равны, т. е. благосостояние одного из агентов не может увеличиться без уменьшения благосостояния другого [4].

Так как карта безразличия каждого ЭА содержит множество его кривых безразличия, то и диаграмма Эджуорта будет вмещать бесконечное множество точек касания кривых двух ЭА. Это множество

образует контрактную кривую. Она представляет все точки, для которых невозможен дальнейший взаимовыгодный обмен, т. е. множество равновесных состояний.

Для определения точки равновесия экономической системы при постоянных ценах необходимо решить систему уравнений, в которой неизвестными являются цены ресурсов  $(p_1, p_2)$  и их конечные запасы у ЭА  $(Q_{1A}, Q_{2A}, Q_{1B}, Q_{2B})$ :

$$(1) \quad Q_{1A}^0 + Q_{1B}^0 = Q_{1A} + Q_{1B} = \bar{Q}_1,$$

$$(2) \quad Q_{2A}^0 + Q_{2B}^0 = Q_{2A} + Q_{2B} = \bar{Q}_2,$$

$$(3) \quad p_1 \cdot Q_{1A}^0 + p_2 \cdot Q_{2A}^0 = p_1 \cdot Q_{1A} + p_2 \cdot Q_{2A} = \bar{M}_A,$$

$$(4) \quad p_1 \cdot Q_{1B}^0 + p_2 \cdot Q_{2B}^0 = p_1 \cdot Q_{1B} + p_2 \cdot Q_{2B} = \bar{M}_B,$$

$$(5) \quad \frac{MU_{1A}}{p_1} = \frac{MU_{2A}}{p_2},$$

$$(6) \quad \frac{MU_{1B}}{p_1} = \frac{MU_{2B}}{p_2}.$$

Уравнения (1), (2) системы — балансы по ресурсам; (3), (4) — балансы по бюджету; (5), (6) — условия оптимального выбора ЭА.

Поскольку в ходе такого обмена один из ресурсов выполняет функции денег, то цены ресурсов можно определить только с точностью до цены этого ресурса. Пусть функцию денег выполняет первый ресурс. Тогда мы можем определить только отношение  $p_2/p_1$ . Действительно, уравнения (1)–(4) являются линейно зависимыми.

Таким образом, при обмене рассматриваются только две точки: точка начала обмена  $W_0$  и точка, принадлежащая контрактной кривой  $W_1$ , но не рассматривается процесс перехода от  $W_0$  к  $W_1$ . Для данной системы не существует промежуточных состояний при переходе в точку равновесия, поэтому цена в ходе обмена не изменяется.

### 3. Ресурсообмен при ограничении его продолжительности

Введем в систему время. В этом случае нам необходимо выяснить: сможет ли экономическая система за определенный промежуток времени достичь равновесия или нет.

Так же, как и в предыдущем разделе, рассмотрим процесс ресурсообмена, в котором участвуют два ЭА. У каждого из них имеется некоторый начальный запас двух ресурсов. Так как система является замкнутой, то общее количество каждого из ресурсов не изменяется. Также каждый ЭА характеризуется:

- функцией полезности;
- оценками стоимости ресурсов  $v_i$ ,  $i \in \{A, B\}$ ;
- кинетикой ресурсообмена  $q(v_i, p)$ ,  $i \in \{A, B\}$ .

Рассмотрим подробнее понятия «оценка стоимости ресурсов» и «кинетика ресурсообмена».

Каждый ЭА имеет оценку своих ресурсов ( $v_i$ ), зависящую от запасов. Эта зависимость является монотонно убывающей, т. е. чем больше ресурса у агента, тем ниже он его оценивает. Оценка ресурса  $v_i$  — это минимальная цена, по которой ЭА готов продать свой ресурс, и это же максимальная цена, по которой он готов его купить [2]. Фактически,  $v_i$  — это предельная норма замещения одного ресурса другим.

В процессе обмена агенты покупают/продают ресурс; интенсивность обмена определяется функциями спроса и предложения  $q_i(p)$ . Они показывают интенсивность покупки или продажи, то есть количество купленных/проданных ресурсов за единицу времени по данной цене  $p$ . Таким образом, предложение — это то количество ресурса, которое ЭА готов продать при данных ценах за единицу времени, а спрос — количество ресурса, которое он хочет купить при данных ценах за единицу времени. Так как мы ввели в экономическую систему время, то функции спроса/предложения определяются потоком ресурсов  $q(v, p)$ . Данный поток  $q(v, p)$  определяет кинетику ресурсообмена [2].

Пусть ЭА  $A$  покупает ресурс, следовательно, его оценка превышает цену продажи ( $v_A > p$ ). ЭА  $B$  продает ресурс, его оценка ниже цены ресурса ( $v_B < p$ ). Запишем функции спроса и предложения в

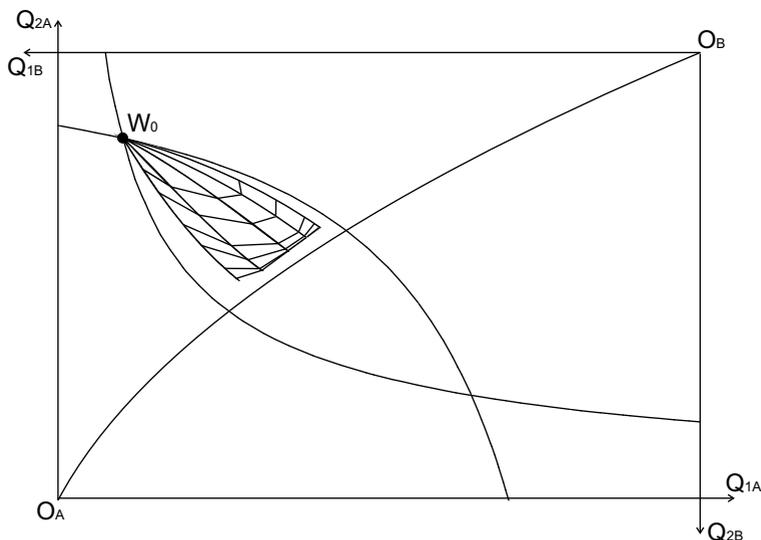


Рис. 2. Диаграмма Эджуорта при ограничении на продолжительность обмена

линейной форме:

$$q_A = \alpha \cdot (v_A - p),$$

$$q_B = \beta \cdot (p - v_B),$$

где  $\alpha, \beta > 0$  — коэффициенты пропорциональности.

Промежуточная цена  $p$  в момент времени  $t$  определяется из условия равенства спроса и предложения  $\alpha \cdot (v - p) = \beta \cdot (p - v)$  и имеет следующий вид:

$$p = \frac{\alpha \cdot v_A + \beta \cdot v_B}{\alpha + \beta}.$$

Для того, чтобы определить запас ресурсов для ЭА  $A$  в момент времени  $t$ , необходимо решить систему уравнений:

$$(7) \quad \frac{\partial Q_{1A}}{\partial t} = q_A = \alpha \cdot (v_A - p), \quad Q_{1A}(0) = Q_{1A}^0,$$

$$(8) \quad \frac{\partial Q_{2A}}{\partial t} = -p \cdot q_A = -p \cdot \alpha \cdot (p - v_A), \quad Q_{2A}(0) = Q_{2A}^0.$$

Уравнение (7) характеризует изменение количества первого ресурса агента  $A$  в момент времени  $t$ , а уравнение (8) показывает изменение запаса денег у ЭА  $A$ . Кроме того, справедливы уравнения (7), (8) для ЭА  $B$ , так что нам не надо вводить дополнительно уравнения динамики запасов ресурсов у ЭА  $B$ . Они в момент времени  $t$  находятся следующим образом:

$$Q_{1B}(t) = \bar{Q}_1 - Q_{1A}(t),$$

$$Q_{2B}(t) = \bar{Q}_2 - Q_{2A}(t).$$

Процесс ресурсообмена также можно представить на диаграмме Эджуорта (рис. 2). При приближении к контрактной кривой интенсивность обмена уменьшается, и за конечное время достигнуть состояния равновесия не представляется возможным.

#### 4. Практическая реализация

Иллюстрацией процесса ресурсообмена могут служить торги на различных аукционах. В качестве примера рассмотрим один из крупнейших интернетаукционов — eBay.com, принадлежащий одноименной компании.

Аукцион eBay является интернет-платформой для продажи любых товаров. Компания выступает лишь в роли посредника при заключении договора купли-продажи между продавцом и покупателем.

Интернет-аукцион (он же «онлайн-аукцион») — аукцион, проводящийся посредством интернета. В отличие от обычных аукционов, участникам интернет-торгов нет необходимости находиться в определенном месте — ставки делаются посредством интернет-сайта или с помощью специальных приложений. Торги на интернет-аукционе ведутся до истечения времени, назначаемого самим продавцом при выставлении лота. Обычный же аукцион завершается в тот момент, когда прекращают повышаться ставки [6].

Исходя из того, что интернет-аукцион является ограниченным по времени его проведения, а также его можно считать закрытой экономической системой, то для описания процесса ресурсообмена можно воспользоваться функциями спроса/предложения, определяющими интенсивность обмена. Описание этих функций дано в разделе 3.

Рассмотрим построение теоретической кривой спроса на основе данных, полученных с аукциона eBay.com. Модель ресурсообмена по-прежнему состоит из двух ЭА — продавца и покупателя (совокупность всех предложений цены покупки) — и двух ресурсов, одним из которых являются деньги, а вторым — ноутбук (обобщение однотипных товаров).

Из завершенных сделок по продаже ноутбуков в ценовом диапазоне от 900 до 1200 долларов были отобраны сделки, в которых имелось от 10 до 20 предложений по цене покупки. Всего рассматривалось сто аукционов. Для каждого из аукционов в таблице была отмечена его продолжительность, начальная цена лота и цена продажи. Для каждого участника торгов — минимальная и максимальная ставки. Максимальную ставку можно считать оценкой данного товара покупателем, начальную цену лота — оценкой продавца, после чего из полученных данных был построен ряд распределения (Таблица 1).

ТАБЛИЦА 1. Распределение покупателей по максимальной предложенной цене

Максимальная цена, долл.	Число покупателей, чел.
150	100
250	83
350	75
450	60
550	52
650	42
750	31
850	22
950	16
1050	9
1150	2
1250	0

Данные таблицы 1 показывают, для какого числа участников торгов та или иная цена является максимальной оценкой товара. На основе этих данных аналитическим путем было найдено уравнение, характеризующее зависимость цены покупки от числа участников торгов, которое и является функцией спроса (рис. 3).

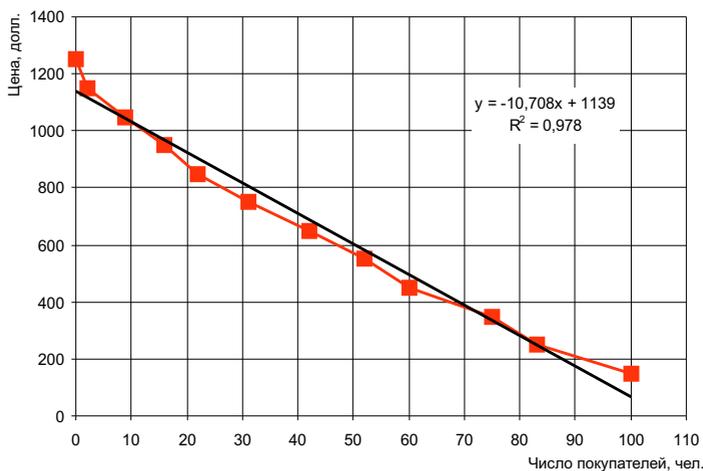


РИС. 3. Зависимость цены покупки от числа участников аукциона

Для получения уравнения, описывающего функцию предложения, необходимо сформировать ряд распределения, показывающий, за какую минимальную цену какое количество продавцов готово продать свой товар.

Описывая процесс ресурсообмена на примере интернет-аукциона можно сказать, что такой обмен из-за ограничения на продолжительность обмена не является взаимовыгодным как для продавца, так и для покупателя. В ходе торгов участники не достигают равновесной цены и поэтому несут дополнительные издержки, связанные с продажей/покупкой товаров.

## 5. Заключение

В микроэкономике существует два подхода к рассмотрению процесса ресурсообмена:

- (1) без учета времени;
- (2) с учетом времени.

В первом случае экономическая система является равновесной. Для нее можно определить только точку начала обмена и точку на контрактной кривой, в которой этот обмен завершится. Во втором же случае система неравновесная. Для такой системы можно показать не только точки ее начального и конечного положения, но и все точки, в которых система находится в каждый момент времени.

Практическим примером процесса ресурсообмена с учетом времени могут служить торги на интернет-аукционах.

### Список литературы

- [1] Амелькин С. А. *Математическая модель равновесия в открытой микроэкономической системе* // Труды Международной конференции «Программные системы: теория и приложения», ИПС РАН, г. Переславль-Залесский, октябрь 2006: В 2-х т. Т. 2. — М.: Физматлит, 2006, с. 267–276. ↑1
- [2] Цирлин А. М. *Необратимая микроэкономика: оптимальные процессы и равновесие в замкнутых системах* // Автоматика и телемеханика, № 7, 2008, с. 113–128. ↑1, 3
- [3] Вэриан Х. *Микроэкономика. Промежуточный уровень. Современный подход*: учеб. для вузов : пер. с англ. — М.: ЮНИТИ, 1997. — 767 с. ↑2.1, 2.3
- [4] Гальперин В. М., Игнатьев С. М., Моргунов В. И. *Микроэкономика: В 2-х т. Общая редакция В.М. Гальперина.* — Т. 2. — СПб.: Экономическая школа, 1999. — 498 с. ↑2.2, 2.3
- [5] Пиндайк Р., Рубинфельд Д. *Микроэкономика.* — М.: Экономика, 1992. — 510 с. ↑2.2, 2.3
- [6] eBay, Википедия — свободная энциклопедия, <http://ru.wikipedia.org/wiki/EBay>. ↑4

A. Y. Vakhrina. *Mathematical model of resources exchange in a closed economic system* // Proceedings of Junior research and development conference of Ailamazyan Pereslavl university. — Pereslavl, 2009. — p. 252–262. (*in Russian*).

ABSTRACT. The process of resources exchange in a closed economic system is described. The system consists of two economic agents. General equilibrium circumstances are considered with time and without time. For both cases diagram of process of resources exchange between economic agents has been drawn. This diagram is called Edgeworth's diagram. Description of auction by the online market eBay.com are considered as example of the process of resources exchange with time.