Е. А. Гербер

Численное моделирование динамики жидкого кольца

Научный руководитель: д.ф-м.н. В. О. Бытев

Аннотация. Рассмотрено движение кольца несжимаемой двухвязкостной жидкости со свободными границами в неклассической модели гидродинамики. Представлены результаты численного моделирования и проведен анализ влияния недиссипативной вязкости на динамику жидкого кольца.

Ключевые слова и фразы: уравнения Навье–Стокса, неклассичекая модель гидродинамики, численное моделирование.

1. Введение

В данном исследовании рассматривается плоское вращательно-симметричное движение по инерции кольца несжимаемой жидкости в рамках неклассической модели гидродинамики [1]. Примером такого кольца может служить аккреционный диск.

Ввиду того, что в неклассической модели гидродинамики наряду с обычной динамической вязкостью присутствует ещё и недиссипативная вязкость, свойства которой неизвестны, была поставлена цель изучить её влияние на динамику жидкого кольца. В работе детально проанализировано влияние недиссипативной вязкости как на радиальную, так и на угловую составляющие скорости.

Анализ основан на численном эксперименте, который потребовал использование соответствующего программного обеспечения. Разработанная в рамках исследования программа «Ring v1.1» позволяет проследить динамику кольца при различных входных параметрах задачи: начальных и граничных условиях, физических характеристиках моделируемого объекта.

2. Постановка задачи

Однозначная разрешимость рассматриваемой задачи для классической системы уравнений Навье–Стокса была доказана в работе Бытева В.О [2]. Там же была установлена и асимптотика поведения кольца при $t \to \infty$. Асимптотика поведения решения при $\nu \to 0$ установлена в работе Пухначева В.В [3]. В работах Лаврентьевой О.М. [4,5] изучено поведение такого объекта при наличии сил поверхностного натяжения. Запишем исходные модифицированные уравнения Навье–Стокса:

$$
\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + (\overrightarrow{u}, \nabla) - M\Delta\overrightarrow{u} + \nabla p = 0, \\ div\,\overrightarrow{u} = 0, \end{array} \right. \tag{1}
$$

где $\overrightarrow{u} = (U, V)$ — вектор скорости, p — гидростатическое давление, $M = \begin{pmatrix} \nu & \nu_0 \\ -\nu_0 & \nu \end{pmatrix}$ — матрица вязкости, ν — обычная диссипативная и ν_0 — недиссипативная вязкости, последняя может иметь любой знак. После ряда преобразований, описанных в [2], исходную задачу (1) удалось свести к следующей системе уравнений:

$$
\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{2\Psi}{\xi+\eta}\omega = 4(\xi+\tau)\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2} + 8\frac{\partial\omega}{\partial\eta}, \\ \frac{d\Psi}{d\tau} = \frac{a\Psi(\Psi+4)}{\xi(\xi+a)ln(1+\frac{a}{\xi})} + \frac{1}{ln(1+\frac{a}{\xi})}\int_0^a [\omega^2 + 4\varepsilon\frac{\partial\omega}{\partial\eta}]d\eta, \\ \frac{d\xi}{d\tau} = 4\Psi, \end{array} \right. \tag{2}
$$

решение которой удовлетворяет начальным и краевым условиям:

$$
\left\{ \begin{array}{l} \Psi(0) = \Psi_0, \\ \xi(0) = \xi_0, \\ \omega(\eta, 0) = \varphi(\eta), \\ \frac{\partial\omega}{\partial\eta} + \varepsilon\frac{\Psi}{(\xi+\eta)^2} = 0\,|_{\eta=0,\eta=\acute{a}}\,. \end{array} \right. \tag{3}
$$

В (2, 3) Ψ соответствует изменнию радиальной скорости, ω - изменению угловой скорости, а ξ - изменению внутреннего радиуса кольца. Особенность системы уравнений (2) заключается в том, что теперь исходная задача со свободными границами преобразована в задачу в полуполосе с фиксированными границами. Для поиска численного решения системы дифференциальных уравнений (2) определяющего поле скоростей движущегося жидкого кольца, была написана программа «Ring v1.1» на языке Delphi, в которой реализован алгоритм конечно-разностной аппроксимации системы уравнений (2).

3. Анализ результатов, полученных при моделировании

Результаты численного моделирования позволили провести исследование влияния безразмерного параметра $\varepsilon = \frac{\nu_0}{\nu}$, определяющего отношение соответствующих вязкостей, на поведение угловой и радиальной составляющих скорости элементов жидкого кольца. Все расчеты проводились с использованием следующих входных данных: использованы физические характеристики для воды, начальный внутренний радиус $R2 = 0.5$ м., начальный внешний радиус $R1 = 1$ м., $\xi_0 = 1$, $\Psi_0 = -1$, $\omega(\eta, 0) = \frac{4\varepsilon}{1+\eta}$. Параметр ε варьировался путем изменения недиссипативной вязкости ν_0.

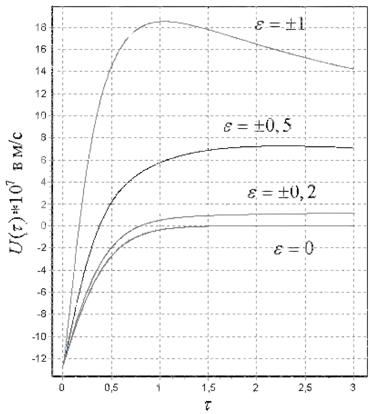

Рис. 1. Зависимость радиальной составляющей скорости элементов кольца от значений параметра $\varepsilon = 0, \pm 0.2, \pm 0.5, \pm 1$

Анализ результатов (см. рис. 1), показывает, что радиальная составляющая скорости не зависит от знака ε, но абсолютное значение параметра ε влияет на интенсивность ее изменения. Таким образом, при $\nu_0 = 0$, зависимость радиальной составляющей скорости от времени не имеет максимума и возрастает до нуля. При $\nu_0 \neq 0$, зависимость радиальной составляющей скорости от времени $U(\tau)$ изменяет свой характер, а именно она возрастает до своего максимального значения и затем стремится к нулю. Помимо этого, недиссипативная вязкость влияет на интенсивность изменения и на значение максимума функции $U(\tau)$. Функция $U(\tau)$ ведет себя четным образом по отношению к знаку недиссипативной вязкости ν_0. То есть процессы сжатия и растяжения жидкого кольца при $\nu_0 \neq 0$ происходят тем интенсивнее, чем больше значение недиссипативной вязкости.

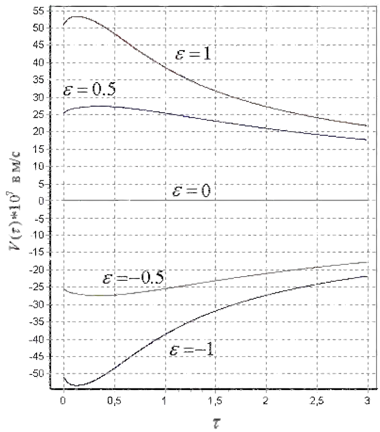

Рис. 2. Зависимость угловой составляющей скорости элементов кольца от значений параметра $\varepsilon = 0, \pm 0.5, \pm 1$

Анализ поведения зависимости угловой составляющей скорости элементов жидкого кольца (рис. 2), показывает, что она зависит от ε. При $\nu_0 = 0$, угловая составляющая скорости равна нулю, т.е. отсутствует вращательное движение жидкого кольца. При $\nu_0 \neq 0$, зависимость угловой составляющей скорости от времени $V(\tau)$ изменяет свой характер, а именно, абсолютная величина недиссипативной вязкости ν_0 влияет на начальное значение и интенсивность изменения угловой составляющей скорости. Функция ведет себя нечетным образом по отношению к знаку ν_0. Для $\nu_0 > 0$, функция возрастает, достигает максимума, а затем начинает убывать, стремясь к нулю. Для $\nu_0 < 0$, функция убывает, достигает минимума, а затем начинает возрастать, стремясь к нулю. Таким образом, изначально вращающееся жидкое кольцо во время процесса сжатия будет вращаться быстрее, а затем после начала процесса растяжения кольцо будет замедлять свое вращательное движение. При этом знак недиссипативной вязкости влияет на направление вращения жидкого кольца: при $\nu_0 > 0$ кольцо вращается по часовой стрелке, и, соответственно, при $\nu_0 < 0$ против часовой стрелки.

4. Заключение

В работе было проведено изучение свойств решений математической модели, описывающей движение жидкого кольца, для произвольных начально–краевых условий. Основным инструментом исследования является программа «Ring v1.1».

Анализ результатов численного моделирования выявил характер влияния недиссипативной вязкости на закономерности изменения радиальной и угловой составляющих поля скоростей жидкого кольца. Помимо этого, было установлено, что при нулевой недиссипативной вязкости динамика жидкого кольца не противоречит классической модели гидродинамики [2]. Отличием от классической модели является то, что при ненулевой недиссипативной вязкости в жидком кольце появляется вращение, более того, знак недиссипативной вязкости определяет направление вращения жидкости в кольце. Данный эффект расширяет область применения неклассической модели гидродинамики.

Список литературы

[1] Андреев В. К. (Бублик) Симметрии неклассических моделей гидродинамики. — Новосибирск: Наука. Физматлит, 2003. — 352 с. с.

[2] Бытев В. О. Неустановившиеся движения кольца вязкой несжимаемой жидкости со свободными границами. — Новосибирск: ПМТФ №3, 1970. — с. 88–98 с.

[3] Пухначев В. В. Неклассические задачи теории пограничного слоя. — Новосибирск: НГУ, 1980. — 75 с. с.

[4] Лаврентьева О. М. Предельные режимы движения вращающегося вязкого кольца. — Динамика сплошной среды, вып. 4. — Новосибирск, 1980. — с. 15–34 с.

[5] Лаврентьева О. М. Неустановившееся движение вращающегося кольца вязкой капиллярной жидкости. — Динамика сплошной среды, вып. 31. — Новосибирск, 1978. — с. 52–60 с.

Тюменский Государственный Университет, аспирант кафедры Математического Моделирования

E. A. Gerber. *Numerical simulation of the dynamics of the liquid ring* // Proceedings of Junior research and development conference of Ailamazyan Pereslavl university. — Pereslavl, 2010. — p. 109–114. (*in Russian*).

Abstract. This work covers the movement of ring of incompressible liquid which have a two viscosity with a free borders in the non classical hydrodynamics model. Also presents the results of calculational modeling and analysis of impact nondissipative viscosity on the dynamic of liquid ring.

Key Words and Phrases: Navier–Stokes equations, non classical hydrodynamics model, numerical modelling.