О. А. Дунаева

Об оценке латентного периода импульсных нейронов при синаптическом взаимодействии

Научный руководитель: О. А. Дунаева

Аннотация. В работе рассмотрена модель химического взаимодействия импульсных нейронов, описываемых дифференциальным уравнением с запаздыванием. Для величины задержки индуцированного спайка получена асимптотическая оценка, имеющая первый порядок точности по отношению к величине, обратной к значению большого параметра.

Ключевые слова и фразы: Импульсный нейрон, латентный период, индуцированный спайк, синаптическое взаимодействие.

1. Введение

В работе Кащенко С.А. и Майорова В.В. [1] была предложена модель биологического нейрона, основанная на следующем дифференциальном уравнении с запаздыванием, описывающем динамику мембранного потенциала $u(t)$:

$$\dot{u}(t) = \lambda\left[f_{\mathrm{K}}(u(t-1)) - f_{\mathrm{Na}}(u(t)) - 1\right]u(t). \tag{1}$$

Здесь λ — скоростной параметр, $f_{\mathrm{Na}}(u)$, $f_{\mathrm{K}}(u)$ — функции, описывают проводимости натриевых и калиевых ионных каналов, причем калиевая проводимость запаздывает по времени, а величина задержки (длительность восходящего участка спайка) принята за единицу времени. Если пресинаптический нейрон с мембранным потенциалом $v(t)$ воздействует на постсинаптический нейрон с мембранным потенциалом $u(t)$ посредством химического синапса, то уравнение для мембранного потенциала нейрона-приемника принимает следующий вид [1]:

$$\dot{u} = \lambda\left[-1 - f_{\mathrm{Na}}(u) + f_{\mathrm{K}}(u(t-1)) + \chi[u,v](t)\right]u. \tag{2}$$

Здесь $\chi[u,v](t)$ — функционал, описывающий синаптическое воздействие. Интервал времени между началом внешнего воздействия и моментом начала индуцированного спайка называется латентным периодом реакции нейрона. В [3] для латентного периода импульсного нейрона 2 получена асимптотическая оценка, имеющая нулевой порядок точности по величине, обратной к значению большого параметра. В работе [2] для изолированного импульсного нейрона 1 получена асимптотическая оценка периода решения, имеющая первый порядок точности. В настоящей работе аналитическая техника работы [2] применяется для получения асимптотической оценки первого порядка точности для латентного периода нейрона.

2. Динамика изолированного нейрона

Для динамики изолированного нейрона сформулирована следующая теорема [2], дающая асимптотическую оценку первого порядка точности для периода решения.

Теорема 1. *Пусть дважды непрерывно дифференцируемые положительные функции $f_{Na}(u)$ и $f_K(u)$ монотонно убывают и при $u \to \infty$ стремятся к нулю быстрее, чем $O(u^{-1})$, т.е. найдется такое $\varepsilon > 0$, что при $u \to \infty$ выполнены соотношения $f_{Na}(u) = O(u^{-1-\varepsilon})$; $f_K(u) = O(u^{-1-\varepsilon})$. Пусть также выполнены соотношения $f'_{Na}(0) = f'_K(0) = 0$ и*

$$\alpha = f_K(0) - f_{Na}(0) - 1 > 0,$$

с начальной функцией $\varphi \in S'$, где

$$S' = \left\{\varphi \in C[-1,0] :\ \lambda^{-1}\exp(2\lambda\alpha s) \leqslant \varphi(s) \leqslant \lambda^{-1}\exp(\lambda\alpha s/2)\right\},$$

Тогда для периода T_2 решения $u(t)$ уравнения справедливо асимптотическое представление $T_2 = T_{21} + o(\lambda^{-1})$, где $T_{21} = T_{20} + \Delta T_2$; $T_{20} = 2 + \alpha_1 + \alpha_2/\alpha$ и

$$\Delta T_2 = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty \left[\frac{f_K(u)-\alpha_1}{\alpha_1 - f_{Na}(u)} + \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\alpha - f_K(u)}{1+f_{Na}(u)}\right]\frac{du}{u}.$$

Начало и окончание спайка будем связывать с моментами времени, когда мембранный потенциал пересекает значение λ^{-1} соответственно с положительной и отрицательной скоростью. Следующая лемма дает асимптотическое выражение для длительности спайка:

Лемма 1. *В предположениях теоремы 1 для длительности спайка T_1 при $\lambda \to \infty$ имеют место следующие асимптотические формулы: $T_1 = T_{11} + o(\lambda^{-1})$, где $T_{11} = T_{10} + \Delta T_1$; $T_{10} = 1 + \alpha_1$ и*

$$\Delta T_1 = \frac{\ln\lambda}{\lambda}(\alpha^{-1} + \alpha_2^{-1}) - \lambda^{-1}\int_0^1 \frac{f_{Na}(u) - f_{Na}(0)}{\alpha_2[1 + f_{Na}(u)]}\,\frac{du}{u} + \\ + \lambda^{-1}\int_0^1 \frac{[f_K(u) - f_K(0)]\alpha + [f_{Na}(u) - f_{Na}(0)]}{\alpha[\alpha_1 - f_{Na}(u)]}\,\frac{du}{u} + \\ + \int_1^\infty \frac{f_K(u) + f_{Na}(u)[f_K(u) - f_K(0)]}{[\alpha_1 - f_{Na}(u)][1 + f_{Na}(u)]}\,\frac{du}{u}.$$

3. Модель синаптического взаимодействия

Рассмотрим уравнение 2, и будем считать, что в уравнении функции $f_{\mathrm{Na}}(u)$, $f_{\mathrm{K}}(u)$ и параметр α удовлетворяют условиям теоремы 1, а функционал $\chi[u,v]$ имеет следующий вид:

$$\chi[u,v](t) = \alpha g \Theta(v - \lambda^{-1})\Theta(\lambda^{-1} - u)\Theta(\lambda^{-1} - u(t-1))\Theta(u - u_*).$$

Здесь параметр g имеет смысл синаптического веса и определяет эффективность синапса, а множитель α является нормировочным. Остальные множители гарантируют невосприимчивость постсинаптического нейрона от времени начала спайка до момента времени, когда потенциал достигнет порогового значения u_*, а также гарантируют, что взаимодействие будет происходить только во время спайка пресинаптического нейрона. Также будем считать, что пороговое значение u_* согласовано с параметром λ:

$$u_* = \lambda^{-1}\exp(-\lambda p), \qquad 0 < p < \alpha_2 - \varepsilon, \tag{3}$$

где ε — некоторое малое положительное число. Условие $p > 0$ гарантирует выполненность неравенства $u_* < \lambda^{-1}$, а условие $p < \alpha_2 - \varepsilon$ гарантирует, что выполнено неравенство $u_* > u_{\min}$.

4. Построение асимптотики

Пусть $u_v(t,\varphi)$ — решение уравнения 2 для начальной функции $\varphi \in S'$. Обозначим через T_R момент времени, когда функция $u_v(t,\varphi)$ пересекает с положительной скоростью пороговое значение:

$$u_* = \lambda^{-1}\exp(-\lambda p).$$

Продолжительность рефрактерного периода T_R определяется из уравнения $u(T_R) = u_*$:

$$T_R = T_{21} - \frac{p}{\alpha}.$$

Задержка возникновения индуцированного спайка определяется величиной $Q(t_v, g) = t_s - t_v$, где t_s — момент начала индуцированного спайка, а t_v — момент начала синаптического воздействия, т.е. $t_v = \min\{t \geqslant 0 : v(t) \geqslant \lambda^{-1}\}$. Длительность воздействия равна продолжительности спайка T_1 воздействующего нейрона. Будем рассматривать возбуждающее воздействие, т.е. $g > 0$.

Теорема 2. *Асимптотическая оценка $\tilde{Q}(t_v, g)$ точности $o(\lambda^{-1})$ для величины $Q(t_v, g)$ зависит от знака функции*

$$\rho(g) = T_{21} - T_R - T_{11}(1 + g).$$

При $\rho(g) > 0$ имеют место формулы:

$$\begin{aligned}
&\tilde{Q}(t_v, g) = T_{21} - t_v, && t_v \in [0, T_R - T_{11}],\\
&\tilde{Q}(t_v, g) = T_{21} - t_v - g(t_v + T_{11} - T_R), && t_v \in [T_R - T_{11}, T_R],\\
&\tilde{Q}(t_v, g) = T_{21} - t_v - gT_{11}, && t_v \in [T_R, T_R + \rho(g)],\\
&\tilde{Q}(t_v, g) = (T_{21} - t_v)/(1 + g), && t_v \in [T_R + \rho(g), T_{21}],
\end{aligned}$$

а при $\rho(g) < 0$ формулы принимают вид:

$$\begin{aligned}
&\tilde{Q}(t_v, g) = T_{21} - t_v, && t_v \in [0, T_R - T_{11}],\\
&\tilde{Q}(t_v, g) = T_{21} - t_v - g(t_v + T_{11} - T_R), && t_v \in [T_R - T_{11}, T_R + \rho_1(g)],\\
&\tilde{Q}(t_v, g) = (T_{21} + gT_R)/(1 + g) - t_v, && t_v \in [T_R + \rho_1(g), T_R],\\
&\tilde{Q}(t_v, g) = (T_{21} - t_v)/(1 + g), && t_v \in [T_R, T_{21}],
\end{aligned}$$

где $\rho_1(g) = \rho(g)/(1 + g)$.

Точность полученных оценок была проверена экспериментально на модели нейрона для различных значениях параметра t_v. Для сравнения качества получаемых оценок вычислялось значение величины $\Delta_k = \max_{t_v} |\tilde{Q}_k(t_v, g) - \tilde{Q}^n(t_v, g)|$ для $k = 0, 1$. В таблице 1 приведены результаты моделирования для некоторых значений параметра λ. Из таблицы видно, что уже при не слишком больших λ полученная в теореме 2 оценка первого приближения для латентного периода оказывается существенно точнее оценки нулевого приближения.

	$\rho(g) < 0$		$\rho(g) > 0$	
λ	Δ_0	Δ_1	Δ_0	Δ_1
3.0	2.57	0.25	3.65	0.6
6.0	1.88	0.07	2.77	0.1
12.0	1.21	0.06	1.79	0.06

Таблица 1. Погрешности оценок нулевого и первого приближения для латентного периода нейрона при различных значениях параметра λ

Список литературы

[1] Кащенко С.А., Майоров В.В.. *Модель адаптации кольцевых нейронных ансамблей.* — Т. **43**, № 11: Радиотехника и Электроника, 1998. — 1–7 с.

[2] Майоров В.В., Мячин М.Л., Парамонов И.В.. *Поправка к периоду решения уравнения, моделирующего динамику мембранного потенциала нейрона.* — Т. **15**, № 2: Моделирование и анализ информационных систем, 1998. — 61–66 с.

[3] Кащенко С.А., Майоров В.В. Модели волновой памяти. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. — 288 с.

ЯрГУ, аспирантура 2 год.

O. A. Dunaeva. *On the estimation of latent period for synaptically coupled spiking neurons* // Proceedings of Junior research and development conference of Ailamazyan Pereslavl university. — Pereslavl, 2010. — p. 183–187. (*in Russian*).

Abstract. We consider a model of chemical interaction of spiking neurons described by differential-difference equation. For delay of induced spike (latent period) we have proposed a new first-order asymptotical estimation.

Key Words and Phrases: Pulsed neuron, the latent period, induced spike, synaptic interactions.