А. С. Любавин

# Решения без кручения уравнений двумерного адиабатического движения газа

Аннотация. Работа посвящена нахождению решений системы уравнений двумерного адиабатического движения газа.
Как известно, на всяком решение этой системы естественным образом определена линейная связность. В работе найдено семейство решений линейная связность, которых имеет нулевой тензор кручений.

*Ключевые слова и фразы:* Математика, дифференциальная геометрия, дифференциальные уравнения.

## 1. Введение

Двумерное адиабатическое движение газа описывается следующей системой уравнений в частных производных

$$
\begin{cases}
v^1_t + v^1 v^1_x + v^2 v^1_y + p_x/\rho = 0, \\
v^2_t + v^1 v^2_x + v^2 v^2_y + p_y/\rho = 0, \\
\rho_t + v^1 \rho_x + v^2 \rho_y + \rho(v^1_x + v^2_y) = 0, \\
p_t + v^1 p_x + v^2 p_y + A(\rho, p)(v^1_x + v^2_y) = 0,
\end{cases} \tag{1}
$$

где $\big(v^1(t,x,y),\, v^2(t,x,y)\big)$, $\rho(t,x,y)$ и $p(t,x,y)$ - соответственно скорость, плотность и давление газа в точке $(x,y)$ в момент времени $t$.

Течение газа называется политропным, см. [1] , если

$$A(\rho, p) = \gamma p,$$

где $\gamma$ положительная константа.

В работе [2] показано, что на графике произвольного решения

$$\big(v^1(t,x,y),\, v^2(t,x,y),\, \rho(t,x,y),\, p(t,x,y)\big)$$

этой системы естественным образом определена линейная связность, тензор кручения которой, вообще говоря, не равен нулю.

В этой же работе показано, что условие равенства нулю тензора кручения эквивалентно следующей системе уравнений:

$$v^1_x - v^2_y = 0, \quad v^1_y - v^2_x = 0. \tag{2}$$

Заметим, что эта система является системой уравнений Коши-Римана. Следовательно, в случае равенства нулю тензора кручения скорость $v = (v^1, v^2)$ является комплексно-аналитической функцией от $z = x + iy$:

$$v = f(z), \quad v = v^1 + iv^2, \quad z = x + iy.$$

Таким образом, решения с нулевым тензором кручения являются решениями совместной системы (1) и (2).

В работе [3] для случая политропного течения газа получены явные решения, тензор кручения, которых равен нулю.

В настоящей работе для случая политропного течения газа мы находим новые явные решения с нулевым тензором кручения.

## 2. Вычисление решений

Решаем совместно системы (2) и (1).

Будем искать решение $v$ системы (2), в виде линейной функции от $z$ (которая является решением уравнений Коши-Римана), т.е.

$$v = \lambda(t)z + \mu(t),$$

где $\lambda(t) = a(t) + ib(t)$ и $\mu(t) = c(t) + id(t)$. Откуда следует, что

$$v^1 = a(t)x - b(t)y + c(t),$$
$$v^2 = b(t)x + a(t)y + d(t).$$

Подставляя эти выражения для $v^1$ и $v^2$ в третье уравнение системы (1), получим:

$$\rho_t + \big(a(t)x - b(t)y + c(t)\big)\rho_x + \big(b(t)x + a(t)y + d(t)\big)\rho_y + 2a\rho = 0.$$

Для решения этого уравнения, используем метод характеристик. Составим характеристическую систему:

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \quad \frac{dx}{d\tau} = ax - by + c, \quad \frac{dy}{d\tau} = bx + ay + d, \quad \frac{d\rho}{d\tau} = -2a\rho.$$

Исходя из первого уравнения видим, что характеристическая система преобразуется к виду:

$$(3) \qquad \frac{dx}{dt} = ax - by + c, \quad \frac{dy}{dt} = bx + ay + d, \quad \frac{d\rho}{dt} = -2a\rho.$$

Решаем третье уравнение:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -2adt, \quad ln|\rho| = -2\int a(t)dt.$$

Положим

$$\alpha(t) = \int a(t)dt.$$

Тогда $ln|\rho| = -2\alpha(t)$, откуда

$$\rho = K_1 e^{-2\alpha(t)}.$$

Аналогично из четвертого уравнения системы (1) получаем

$$p = K_2 e^{-2\gamma\alpha(t)}.$$

Теперь решаем первые два уравнения системы (3). Их можно переписать в виде:

$$\dot{z} = \lambda z + \mu.$$

Методом вариации постоянной получаем:

$$\dot{z} = \lambda z \Rightarrow z = (\tilde{C}_1 + i\tilde{C}_2)e^{\int \lambda dt} = (\tilde{C}_1 + i\tilde{C}_2)e^{\alpha(t)+i\beta(t)},$$

где $\beta = \int b(t)dt$. Откуда

$$(\dot{\tilde{C}}_1 + i\dot{\tilde{C}}_2)e^{\alpha(t)+i\beta(t)} = \mu \Rightarrow \dot{\tilde{C}}_1 + i\dot{\tilde{C}}_2 = (c+id)e^{-\alpha(t)-i\beta(t)} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1 + i\tilde{C}_2 &= \int (c+id)e^{-\alpha(t)-i\beta(t)}dt \\ &= \int e^{-\alpha}(c\cos(\beta) + d\sin(\beta))dt \\ &\quad + i\int e^{-\alpha}(-c\sin(\beta) + d\cos(\beta))dt + C_1 + iC_2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$z = e^{\alpha+i\beta}\Big(\int (c+id)e^{-(\alpha+i\beta)}dt + C_1 + iC_2\Big).$$

Отсюда мы получаем два первых интеграла:

$$I_1 = xe^{-\alpha}\cos\beta + ye^{-\alpha}\sin\beta - \int e^{-\alpha}\big(c\,\cos(\beta) + d\,\sin(\beta)\big)dt,$$

$$I_2 = -xe^{-\alpha}\sin\beta + ye^{-\alpha}\cos\beta - \int e^{-\alpha}\big(-c\,\sin(\beta) + d\,\cos(\beta)\big)dt.$$

Теперь искомые компоненты решения $\rho$ и $p$ можно представить в виде:

$$\rho = e^{-2\alpha(t)}F(I_1, I_2), \quad p = e^{-2\gamma\alpha(t)}G(I_1, I_2),$$

где $F$ и $G$ произвольные гладкие функции от двух переменных.
Положим, что

$$F = (I_1 + I_2)^{n-1}, \quad G = (I_1 + I_2)^n.$$

Теперь, два первых уравнения системы (1) переписываются в виде:

$$\begin{gathered}\dot{a}x - \dot{b}y + \dot{c} + (ax - by + c)a + (bx + ay + d)(-b)\\ +e^{2\alpha(1-\gamma)}ne^{-\alpha}(\cos\beta - \sin\beta) = 0,\\ \dot{b}x + \dot{a}y + \dot{d} + (ax - by + c)b + (bx + ay + d)a\\ +e^{2\alpha(1-\gamma)}ne^{-\alpha}(\cos\beta + \sin\beta) = 0.\end{gathered}$$

Рассматривая эти уравнения как многочлены от $x$ и $y$ получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned}&\dot{a} + a^2 - b^2 = 0,\\ &\dot{b} + 2ab = 0,\\ &\dot{c} + ac - bd + ne^{\alpha(1-2\gamma)}(\cos\beta - \sin\beta) = 0,\\ &\dot{d} + bc - ad + ne^{\alpha(1-2\gamma)}(\cos\beta + \sin\beta) = 0.\end{aligned} \tag{4}$$

Из второго соотношения получаем

$$b = K_1 e^{-2\alpha}.$$

Теперь в первом соотношение сделаем замену $\dot{\alpha} = a$ и подставим в него полученное значение $b$:

$$\ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2 - K_1^2 e^{-4\alpha} = 0.$$

Поскольку полученное уравнение не содержит независимое переменное, то порядок уравнения можно понизить, взяв за новую переменную $\alpha$, а за неизвестную функцию $\dot{\alpha} = h(\alpha)$. В результате получим следующее уравнение

$$h'h + h^2 - K_1^2 e^{-4\alpha} = 0.$$

Теперь положим $g = h^2$

$$\frac{1}{2}g' + g - K_1^2 e^{-4\alpha} = 0.$$

Решая это уравнение методом вариации постоянной получаем

$$g = K_2 e^{-2\alpha} - K_1^2 e^{-4\alpha}.$$

Или, переходя к переменной $\alpha$,

$$\dot{\alpha}^2 = K_2 e^{-2\alpha} - K_1^2 e^{-4\alpha} \Rightarrow \dot{\alpha} = \pm e^{-\alpha}\sqrt{K_2 e^{2\alpha} - K_1^2} \Rightarrow$$

$$\pm\, dt = \frac{e^{2\alpha} d\alpha}{\sqrt{K_2 e^{2\alpha} - K_1^2}} \Rightarrow t - K_3 = \pm \int \frac{e^{2\alpha} d\alpha}{\sqrt{K_2 e^{2\alpha} - K_1^2}}.$$

Положим, что $e^{2\alpha} = r$, тогда

$$t - K_3 = \pm \int \frac{dr}{2\sqrt{rK_2 - K_1^2}}.$$

откуда

$$\pm\sqrt{e^{2\alpha} K_2 - K_1^2} = (t - K_3)K_2 \;\Rightarrow\; e^{2\alpha} = \frac{(t-K_3)^2 K_2^2 + K_1^2}{K_2}$$

и

$$\alpha = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(t-K_3)^2 K_2^2 + K_1^2}{K_2}\right).$$

Отсюда получаем

$$a = \frac{K_2^2(t-K_3)}{K_1^2 + K_2^2(t-K_3)^2}, \quad b = \frac{K_2 K_1}{K_1^2 + K_2^2(t-K_3)^2},$$

$$\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{K_2(t-K_3)}{K_1}\right) + \beta_0.$$

Теперь два последних уравнения системы (4) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &\dot{c} + ac - bd + ne^{\alpha(1-2\gamma)}(\cos\beta - \sin\beta) = 0, \\ &\dot{d} + bc + ad + ne^{\alpha(1-2\gamma)}(\cos\beta + \sin\beta) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$e^{\alpha(1-2\gamma)} = \left(\frac{(t-K_3)^2 K_2^2 + K_1^2}{K_2}\right)^{(1-2\gamma)/2}.$$

Положим $z = c + id$ и $\lambda = a + ib$, тогда уравнения (5) записываются в виде

$$\dot{z} = \lambda z + ne^{\alpha(1-2\gamma)}\big((\cos\beta - \sin\beta) + i(\cos\beta + \sin\beta)\big).$$

Методом вариации постоянной получаем:

$$z = (\tilde{K}_4 + i\tilde{K}_5)e^{\alpha+i\beta},$$

откуда

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{K}}_4 + i\dot{\tilde{K}}_5 &= e^{\alpha+i\beta}(ne^{\alpha(1-2\gamma)}\big((\cos\beta - \sin\beta) + i(\cos\beta + \sin\beta)\big)\\ &= ne^{-2\alpha\gamma}(1+i) = \frac{nK_2(1+i)}{((t-K_3)^2K_2^2 + K_1^2)^\gamma}\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}\tilde{K}_4 &= nK_2\int\frac{dt}{((t-K_3)^2K_2^2+K_1^2)^\gamma} + K_4,\\ \tilde{K}_5 &= nK_2\int\frac{dt}{((t-K_3)^2K_2^2+K_1^2)^\gamma} + K_5.\end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$c+id = (\tilde{K}_4+i\tilde{K}_5)e^{\alpha+i\beta} = e^\alpha\big(\tilde{K}_4\cos\beta - \tilde{K}_5\sin\beta + i(\tilde{K}_5\cos\beta + \tilde{K}_4\sin\beta)\big).$$

Отсюда

$$\begin{aligned}c &= e^\alpha(\tilde{K}_4\cos\beta - \tilde{K}_5\sin\beta),\\ d &= e^\alpha(\tilde{K}_4\sin\beta + \tilde{K}_5\cos\beta).\end{aligned}$$

где

$$e^\alpha = \sqrt{\frac{K_2^2(t-K_3)^2+K_1^2}{K_2}}.$$

В результате получили следующие решения системы (1)

$$\begin{aligned}v_1(t,x,y) = \frac{K_2^2(t-K_3)x}{K_1^2+K_2^2(t-K_3)^2} - \frac{K_2K_1y}{K_1^2+K_2^2(t-K_3)^2}\\ + \sqrt{\frac{K_2^2(t-K_3)^2+K_1^2}{K_2}}(\tilde{K}_4\cos\beta - \tilde{K}_5\sin\beta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_2(t,x,y) = \frac{K_2K_1x}{K_1^2+K_2^2(t-K_3)^2} + \frac{K_2^2(t-K_3)y}{K_1^2+K_2^2(t-K_3)^2}\\ + \sqrt{\frac{K_2^2(t-K_3)^2+K_1^2}{K_2}}(\tilde{K}_4\sin\beta + \tilde{K}_5\cos\beta),\end{aligned}$$

$$\rho(t,x,y)=\frac{K_2}{K_2^2(t-K_3)^2+K_1^2}\Big(\sqrt{\frac{K_2}{K_2^2(t-K_3)^2+K_1^2}}(x\cos\beta$$
$$+y\sin\beta)-\int\sqrt{\frac{K_2}{K_2^2(t-K_3)^2+K_1^2}}\big(c\,\cos(\beta)+d\,\sin(\beta)\big)dt\Big)^{n-1},$$

$$p(t,x,y)=\Big(\frac{K_2}{K_2^2(t-K_3)^2+K_1^2}\Big)^{\gamma}\Big(\sqrt{\frac{K_2}{K_2^2(t-K_3)^2+K_1^2}}(x\cos\beta$$
$$+y\sin\beta)-\int\sqrt{\frac{K_2}{K_2^2(t-K_3)^2+K_1^2}}\big(c\,\cos(\beta)+d\,\sin(\beta)\big)dt\Big)^{n},$$

где

$$\beta=\mathrm{arctg}\Big(\frac{K_2(t-K_3)}{K_1}\Big)+\beta_0.$$

## 3. Заключение

В данной работе находилось новое семейство решений уравнений адиабатического движения газа с нулевым тензором кручения. В результате были найдены все заданные компоненты $\big(v^1(t,x,y),\ v^2(t,x,y)\big)$, $\rho(t,x,y)$ и $p(t,x,y)$ исходной системы (1).

## Список литературы


[1] Овсянников Л. В., *Лекции по основам газовой динамики*,Ижевск, 2003, Институт компьютерных исследований, стр. 336.↑ 49.

[2] Yumaguzhin, Valeriy, *Geometric structures on solutions of equations adiabatic gas motion*, Lobachevskii Journal of Mathematics, 2015, Vol. 36, No. 3, to appear.↑ 49.

[3] Юмагужин В.А., Юмагужина В.Н., *Новые явные решения без кручения 2-мерных уравнений газовой динамики*, Программные системы: теория и приложения, No. 2(6), 2011, стр. 89–95.↑ 50.


**Специфика статьи**: *Развитие авиационно-космических технологий, Алгоритм, Дифференциальное и интегральное исчисления.*

Научный руководитель:

*д.ф.-м.н* В. А. Юмагужин

*Об авторе:*

**Алексей Сергеевич Любавин**
УГП имени А. К. Айламазяна, 5М01
*e-mail:* trey016@mail.ru

*Пример ссылки на эту публикацию:*

А. С. Любавин. «Решения без кручения уравнений двумерного адиабатического движения газа». *Наукоёмкие информационные технологии: Труды XIX Молодежной научно-практической конференции* SIT-2015. УГП имени А. К. Айламазяна. — Переславль-Залесский: Изд-во «Университет города Переславля», 2015 с. 49–57.
URL https://edu.botik.ru/proceedings/sit2015.pdf

Aleksey Lyubavin. *Solving the equations of two-dimensional adiabatic motion of the gas in the space without torsion.*

Abstract. The work is dedicated to finding solutions of the system equations of two-dimensional adiabatic gas motion. As you know, any solution of this system naturally determined by linear connection. We have found the family of solutions linear connection, which has zero torsion tensor.

*Key Words and Phrases:* mathematics, differential geometry, differential equations.

*Sample citation of this publication:*

Aleksey Lyubavin. "Solving the equations of two-dimensional adiabatic motion of the gas in the space without torsion". *Science-intensive information techlnologies: Proceedings of XIX Junior R&D conference SIT-2015.* Ailamazyan Pereslavl University. — Pereslavl-Zalesskiy: Pereslavl University Publishing, 2015 pp. 49–57. (*In Russian.*)

URL https://edu.botik.ru/proceedings/sit2015.pdf